

# 1 Análisis de la Respuesta Temporal

A partir de la representación matemática de un sistema se puede realizar un análisis teórico de la respuesta temporal del mismo ante diferentes tipos de perturbaciones. El estudio de dicha respuesta temporal es de vital importancia para el posterior análisis de su comportamiento y el posible diseño de un sistema de control. En este capítulo se realizará el estudio detallado de la respuesta temporal de un sistema, el cual se fundamentará en el conocimiento previo que se tiene del mismo, o lo que es lo mismo en el modelo del sistema, tal como se mencionó anteriormente.

En principio, se define la respuesta temporal de un sistema como el comportamiento en el tiempo que tiene el mismo ante alguna variación en sus entradas. En la Fig. 1.1 se puede apreciar la respuesta temporal de un sistema, ante una entrada particular, la cual está compuesta por una respuesta transitoria y una permanente. Así mismo, se puede expresar dicha respuesta según la Ec. 1.1, donde  $y_t(t)$  y  $y_{ss}(t)$  son la respuesta transitoria y la permanente, respectivamente.

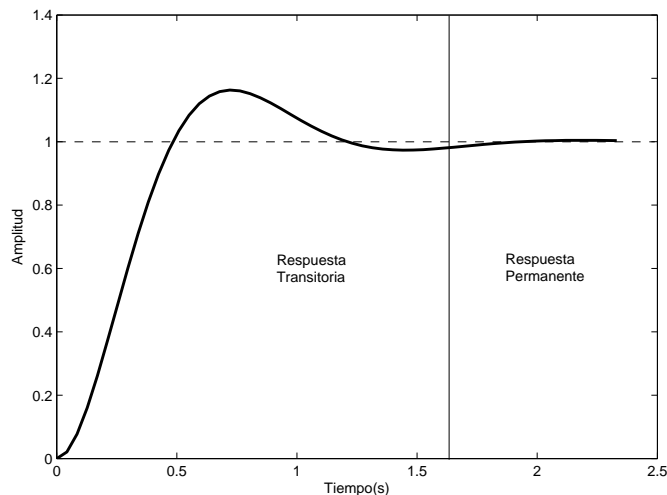


Figura 1.1: Respuesta Temporal

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \quad (1.1)$$

El análisis de la respuesta temporal se realizará, para diferentes tipos de sistemas y diferentes tipos de entrada, separando la respuesta en transitoria y permanente. Es por ello que a continuación se describen una serie de funciones que serán utilizadas para representar señales de entradas típicas.

## 1.1. Señales de Entradas

En el análisis de un sistema de control es necesario conocer su comportamiento ante diferentes tipos de entradas o perturbaciones, por lo que se estudiarán, en esta sección, una serie de señales que comúnmente ocurren en la vida real, tales como el impulso, el escalón, la rampa y la parábola.

El impulso es una entrada cuya duración en el tiempo es instantánea, en tanto que el escalón es una entrada cuya magnitud es aplicada en forma constante a lo largo del tiempo. La rampa es una entrada cuya amplitud varía

linealmente a lo largo del tiempo y la parábola es aquella cuya amplitud varía cuadráticamente a lo largo del tiempo. En la Tabla 1.1 se muestra la expresión matemática de cada una de ellas y su transformada de Laplace, en tanto que en la Fig. 1.2 se muestra la representación gráfica de dichas entradas.

Impulso	$r(t) = A\delta(t)$	$R(s) = A$
Escalón	$r(t) = Mt$	$R(s) = \frac{M}{s}$
Rampa	$r(t) = Mt$	$R(s) = \frac{M}{s^2}$
Parábola	$r(t) = \frac{Mt^2}{2}$	$R(s) = \frac{M}{s^3}$

Cuadro 1.1: Diferentes Entradas

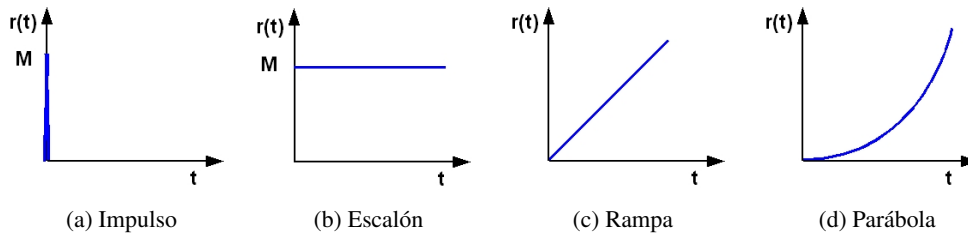


Figura 1.2: Diferentes Tipos de Entradas

## 1.2. Clasificación de los Sistemas

Tal como se mencionó previamente los sistemas tienen características particulares que los diferencian y permiten su clasificación. Dicha clasificación se realizará según su orden y según su tipo, siendo el orden del sistema coincidente con el número de variables de estado que se necesitan para describirlo y con el grado del denominador de su función de transferencia, en tanto que, el tipo de un sistema coincide con el número de soluciones en el origen que presenta el denominador de su función de transferencia, o lo que será llamada en adelante la ecuación característica del sistema.

En forma general una función de transferencia puede escribirse tal como se muestra en la Ec. 1.2, donde las soluciones del numerador se conocerán como los ceros del sistema y las soluciones del denominador como los polos o raíces de la ecuación característica, tal como se mencionó con anterioridad. A partir de allí,  $s^T$  representa un polo de multiplicidad  $T$  en el origen, el cual coincide con el tipo del sistema.

$$G(s) = \frac{k(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s^T (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_p s + 1)} \quad (1.2)$$

A continuación se muestra el estudio detallado de la respuesta transitoria para sistemas de primer y segundo orden, en tanto que, para sistemas de orden superior, la respuesta transitoria se aproximará a la respuesta de sistemas de ordenes inferiores según criterios a establecerse. Así mismo, se irá destacando la influencia que tiene el tipo del sistema en su respuesta.

### 1.3. Sistemas de Primer Orden

Considere un sistema de primer orden tipo 0 que puede ser representado, en forma general, utilizando una función de transferencia como la que se muestra en la Ec. 1.3, en la cual  $K$  se define como la ganancia del sistema y  $\tau$  como su constante de tiempo. Dichos parámetros caracterizan la respuesta del sistema, tanto temporal como permanente, tal como quedará demostrado a continuación.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (1.3)$$

Ante una entrada de tipo escalón de magnitud  $M$ , la salida  $C(s)$  quedará expresada como sigue,

$$C(s) = \left(\frac{M}{s}\right) \left(\frac{K}{\tau s + 1}\right) \quad (1.4)$$

La respuesta exacta en el tiempo,  $c(t)$ , se encuentra separando en fracciones simples y antitransformando término a término, para obtener finalmente  $c(t)$ , tal como lo expresa la Ec. 1.6.

$$C(s) = MK \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right) \quad (1.5)$$

$$c(t) = MK \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (1.6)$$

Partiendo de dicha expresión es posible realizar un esbozo de la respuesta evaluando la misma para ciertos valores de  $t$ .

$$c(0) = MK(1 - e^0) = 0 \quad (1.7)$$

$$c(\tau) = MK(1 - e^{-1}) = 0,632MK \quad (1.8)$$

$$c(\infty) = MK(1 - e^{-\infty}) = MK \quad (1.9)$$

Utilizando la Ec. 1.8 se puede definir la constante de tiempo,  $\tau$ , como el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63,2% de su valor final, en tanto que, la Ec. 1.9 permite definir  $K$  como el parámetro del sistema que determina su valor final. En la Fig. 1.3 se muestra la respuesta, ante un escalón unitario, de un sistema de primer orden, cuya constante de tiempo es igual a dos y su ganancia igual a uno. En dicha figura se puede observar la influencia de  $\tau$  sobre la respuesta transitoria y la de  $K$  sobre el valor del establecimiento.

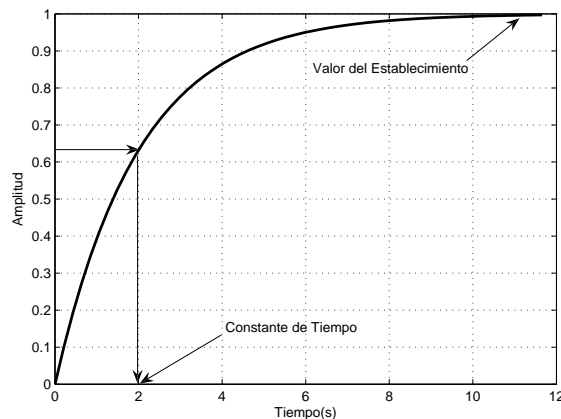


Figura 1.3: Respuesta al Escalón de un Sistema de Primer Orden

Cabe destacar que, el cálculo del valor del establecimiento de una variable se puede realizar a partir de su transformada de Laplace, utilizando el teorema del valor final, gracias al cual se puede conocer el valor de dicha variable cuando el tiempo tiende a infinito. En la Ec. 1.10 se muestra dicho teorema, donde se expresa el valor de la variable,  $r(t)$ , cuando el tiempo tiende a infinito en función de su transformada de Laplace,  $R(s)$ . Para el caso particular de un sistema de primer orden, cuya entrada sea un escalón de magnitud  $M$ , la transformada de Laplace de su salida  $C(s)$  se mostró previamente en la Ec. 1.4, a partir de la cual se puede obtener el valor del establecimiento para la salida  $c(t)$  tal como se muestra en la Ec. 1.11, el cual coincide con el mostrado previamente en la Ec.1.9.

$$r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \quad (1.10)$$

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{M}{s} \left( \frac{K}{\tau s + 1} \right) \right] = MK \quad (1.11)$$

Con la intención de resaltar la influencia que tiene la constante de tiempo y la ganancia sobre la respuesta temporal del sistema bajo estudio, se muestra en la Fig. 1.4 (a) la variación de la respuesta para modificaciones en la constante de tiempo y en la Fig. 1.4 (b) la variación de la respuesta para modificaciones de la ganancia. En dichas figuras se aprecia el efecto que tienen sobre la respuesta los parámetros característicos de la función de transferencia,  $K$  y  $\tau$ , a mayor constante de tiempo se tiene menor rapidez de la respuesta y a mayor ganancia mayor será el valor del establecimiento.

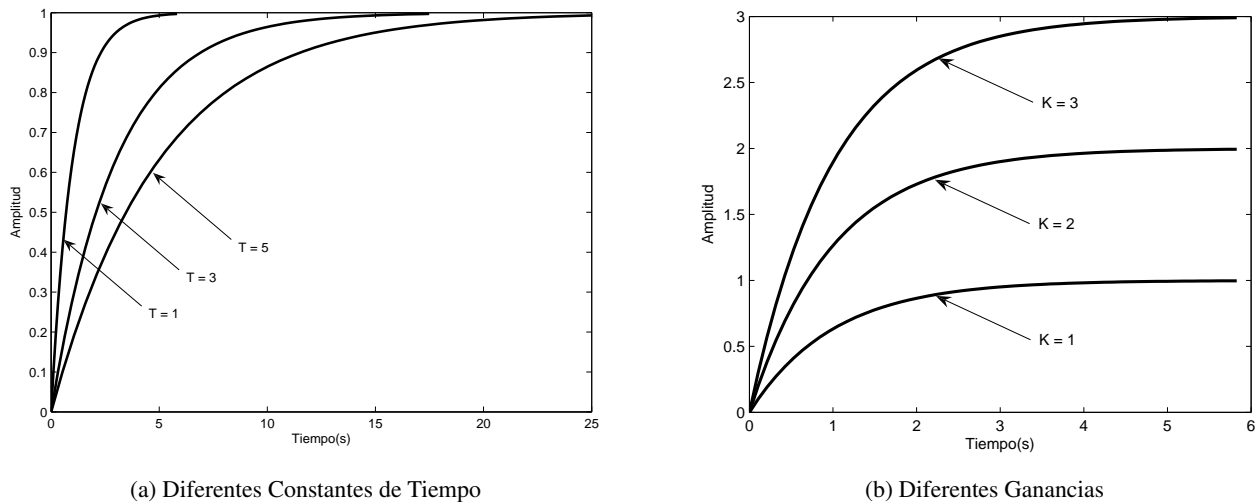


Figura 1.4: Respuesta al escalón para variaciones de  $K$  y  $\tau$

El tiempo que tarda en establecerse la respuesta, conocido como tiempo de establecimiento puede expresarse en función de la constante de tiempo y está definido utilizando dos criterios conocidos como, el criterio del 5% y del 2%, según los cuales el sistema estará establecido cuando la respuesta permanezca dentro del 5% o del 2% de su valor final, respectivamente. A partir de la Ec. 1.6 se obtienen las expresiones del tiempo de establecimiento que se muestran a continuación.

$$t_{s(5\%)} = 3\tau \quad (1.12)$$

$$t_{s(2\%)} = 4\tau \quad (1.13)$$

Para el caso en que la entrada  $R(s)$  fuese una rampa unitaria, la respuesta del sistema bajo estudio se puede apreciar en la Fig. 1.5, en la cual se observa que la salida no sigue a la rampa pues su pendiente nunca tiende a la

pendiente de la entrada. De allí que puede concluirse que este tipo de sistemas no presenta una salida aceptable ante una variación tipo rampa en su entrada.

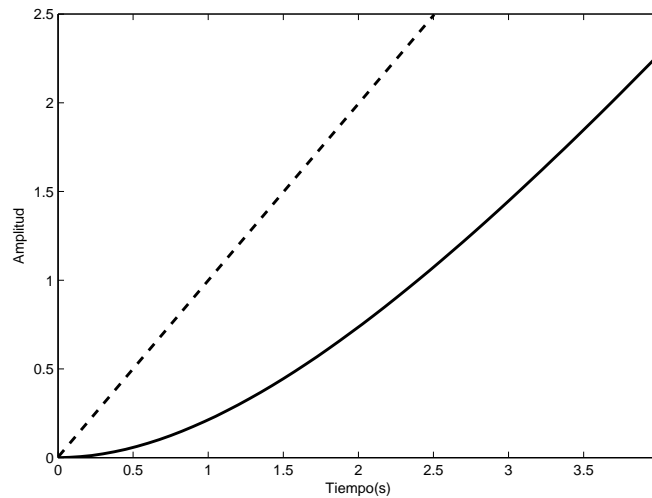


Figura 1.5: Respuesta Sistema Primer Orden Tipo 0 ante una Entrada Rampa

Además del análisis a lazo abierto, se realiza un análisis semejante de la respuesta transitoria a lazo cerrado, para lo cual se parte del sistema mostrado en la Fig. 1.6 y se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado, Ec. 1.14, en donde la ganancia y la constante de tiempo para dicho sistema se muestran en las Ecs. 1.15 y 1.16, respectivamente.

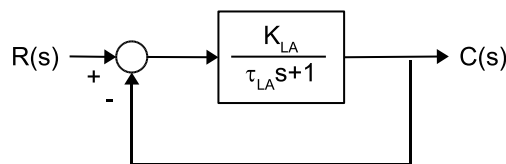


Figura 1.6: Sistema de Primer Orden a Lazo Cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s+1}}{1 + \frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s+1}} = \frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s + (1 + K_{LA})} = \frac{\frac{K_{LA}}{1+K_{LA}}}{\frac{\tau_{LA}}{1+K_{LA}}s + 1} \quad (1.14)$$

$$K_{LC} = \frac{K_{LA}}{1 + K_{LA}} \quad (1.15)$$

$$\tau_{LC} = \frac{\tau_{LA}}{1 + \tau_{LA}} \quad (1.16)$$

Tal como se puede observar la función de transferencia a lazo cerrado es completamente semejante a la mostrada en la Ec. 1.3, por lo que la forma de la respuesta al escalón también lo será, es decir, será de tipo exponencial y estará caracterizada por una constante de tiempo y una ganancia, a lazo cerrado. En la Fig. 1.7 se muestra la comparación entre respuesta al escalón a lazo abierto y a lazo cerrado para un sistema particular, en la cual se puede observar que el sistema a lazo cerrado resulta más rápido pues tiene una menor constante de tiempo, en tanto que su valor de establecimiento se acerca más al valor de la entrada debido a que la ganancia a lazo cerrado se acerca a la unidad.

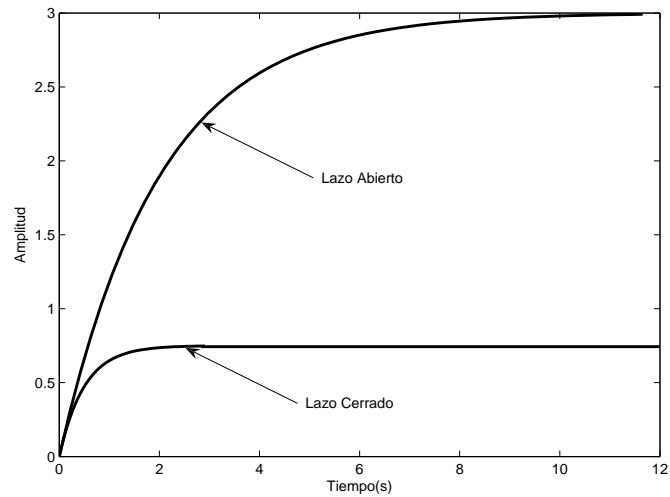


Figura 1.7: Comparación Lazo Abierto Lazo Cerrado

**Ejemplo 1.1** Ante una entrada escalón unitario, compare las respuestas a lazo abierto y a lazo cerrado de dos sistemas cuyas funciones de transferencia son las que se muestran en las Ecs. 1.17 y 1.18. Considere que la retroalimentación es unitaria e indique en cada caso el tiempo de establecimiento y el valor del establecimiento.

$$G_1(s) = \frac{2}{10s + 1} \quad (1.17)$$

$$G_2(s) = \frac{30}{25s + 5} \quad (1.18)$$

**Solución**

La respuesta de un sistema de primer orden depende de su ganancia y de su constante de tiempo, tanto a lazo abierto como a lazo cerrado, es por ello que lo primero que debe hacerse es determinar para cada sistema el valor de dichos parámetros. A partir de allí se obtiene, para cada caso, el tiempo de establecimiento y el valor del establecimiento, tal como se muestra a continuación.

Para  $G_1(s)$

$$\begin{array}{llll} K_{LA} = 2 & \tau_{LA} = 10 & t_{s(2\%)} = 40 & c(\infty) = 2 \\ K_{LC} = 0,66 & \tau_{LC} = 3,33 & t_{s(2\%)} = 13,33 & c(\infty) = 0,66 \end{array}$$

Para  $G_2(s)$

$$\begin{array}{llll} K_{LA} = 6 & \tau_{LA} = 5 & t_{s(2\%)} = 20 & c(\infty) = 6 \\ K_{LC} = 0,86 & \tau_{LC} = 0,71 & t_{s(2\%)} = 2,85 & c(\infty) = 0,86 \end{array}$$

El estudio de la respuesta transitoria también se realiza para sistemas de primer orden de tipo I, a lazo abierto y a lazo cerrado, como los que se muestran en las Figs. 1.8 (a) y (b). Ante una entrada de tipo escalón, la respuesta del sistema a lazo abierto crece indefinidamente con una pendiente diferente a la rampa de entrada, tal como

sucede con la respuesta del sistema de tipo 0 ante entrada rampa. Es por ello que se estudiará solamente la respuesta a lazo cerrado, la cual si tiene un comportamiento aceptable.

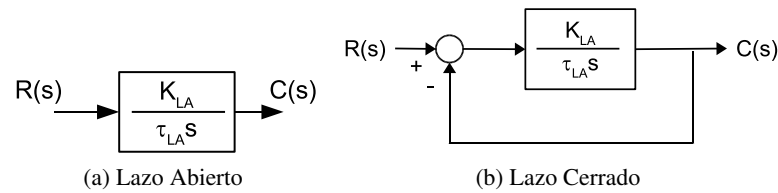


Figura 1.8: Sistema de Primer Orden Tipo Uno

Al igual que para el caso anterior se obtendrá la función de transferencia a lazo cerrado en función de los parámetros de lazo abierto, la cual se muestra en la Ec. 1.19, en la que se observa que la ganancia a lazo cerrado será siempre uno, independiente de los parámetros a lazo abierto, en tanto que la constante de tiempo a lazo cerrado dependerá de la constante de tiempo y la ganancia, a lazo abierto.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s}}{1 + \frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s}} = \frac{K_{LA}}{\tau_{LA}s + K_{LA}} = \frac{1}{\frac{\tau_{LA}}{K_{LA}}s + 1} = \frac{1}{\tau_{LC}s + 1} \quad (1.19)$$

Como se puede observar dicha función es semejante a las funciones de transferencia mostradas previamente para el sistema de primer orden tipo 0 (Ec. 1.3 y Ec. 1.14), por lo tanto la respuesta ante un escalón será semejante a la desarrollada anteriormente, quedando la expresión de la salida en función del tiempo según se muestra en la Ec. 1.20. Cabe destacar que, dado que la ganancia es siempre unitaria, el valor del establecimiento a lazo cerrado siempre coincidirá con la magnitud del escalón. En la Fig. 1.9 se muestra la respuesta a lazo cerrado de este tipo de sistemas ante un escalón unitario, en la cual se puede apreciar que el valor del establecimiento coincide con la entrada.

$$c(t) = M \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1.20)$$

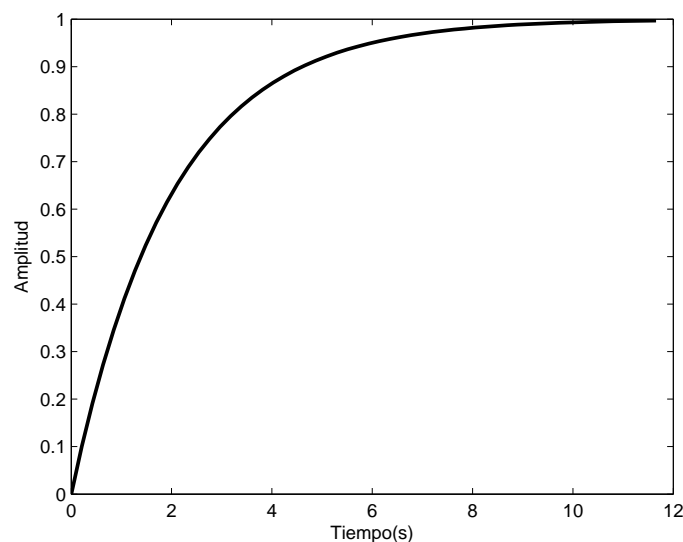


Figura 1.9: Respuesta a lazo cerrado ante el escalón unitario de sistema tipo I

Para este caso también se puede analizar la respuesta ante una entrada rampa tal como sigue. Conocida la transformada de Laplace de la rampa,  $R(s)$ , se obtiene la transformada de Laplace de  $C(s)$  y a partir de allí la expresión para la salida que se muestra en la Ec. 1.22.

$$R(s) = \frac{M}{s^2} \Rightarrow C(s) = \left(\frac{1}{s^2}\right) \left(\frac{M}{\tau s + 1}\right) = M \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}\right) \quad (1.21)$$

$$c(t) = M \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (1.22)$$

En la Fig. 1.10 se muestra la respuesta a lazo cerrado ante una rampa unitaria para diferentes valores de  $K$ , en la cual se puede apreciar que, cuando el tiempo tiende a infinito, el sistema presenta una salida que sigue a la rampa pues tiene la misma pendiente. Así mismo se observa que en el estado estacionario o permanente siempre existirá una diferencia entre la entrada y la salida que disminuye a medida que aumenta la ganancia del lazo abierto.

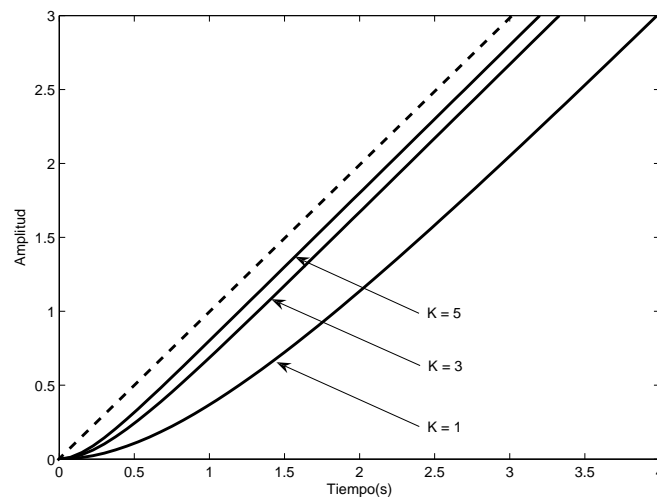


Figura 1.10: Respuesta a la Rampa Unitaria

**Ejemplo 1.2** El proceso que se muestra en la Fig. 1.11 es un tanque abierto a la atmósfera, para el cual se tiene, en la Ec. 1.23, una expresión del modelo del mismo.

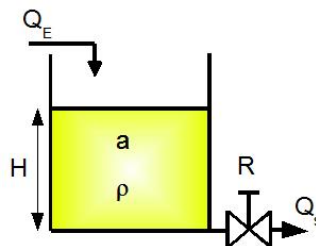


Figura 1.11: Tanque abierto a la atmósfera

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_E(t) - \left(\frac{1}{R}\right) h(t) \quad (1.23)$$



Considerando que el valor del área del tanque es  $A = 6$  y que la resistencia en la válvula es  $R = 10$ , se desea conocer lo siguiente:

**a)** El valor de la constante de tiempo, del tiempo de establecimiento (2%) y del valor del establecimiento de la altura a lazo abierto, ante una variación escalón unitario en el caudal de entrada.

**b)** El valor de la altura del nivel del tanque, ante una variación escalón de magnitud 2 en el caudal de entrada, cuando hayan transcurrido 120 seg. (considere que la unidad de tiempo es el seg.).

**c)** Partiendo de los datos dados en **b)**, calcule ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que la altura del tanque supere un valor igual al 80% del valor final.

**d)** Si se plantea, para la altura del tanque, un sistema de control de retroalimentación simple manipulando el caudal a la entrada del mismo, realice el diagrama de bloques del esquema de control propuesto e implántelo sobre el proceso. Calcule además, la constante de tiempo y el valor de establecimiento de la altura a lazo cerrado, ante una variación del tipo escalón unitario en la referencia. Para ello, suponga unitarias las funciones de transferencia del medidor, del controlador y del actuador.

**e)** Finalmente se desea conocer, a lazo cerrado, la dependencia del valor del establecimiento de la altura y la constante de tiempo del sistema con respecto al área del tanque y a la resistencia.

### Solución

**a)** Para conocer el valor de la constante de tiempo es necesario determinar la función de transferencia entre la altura y el caudal de entrada, lo cual se realiza a partir del modelo del proceso. Como dicho modelo es lineal, se toma directamente la transformada de Laplace de la ecuación y se obtiene la función de transferencia requerida.

$$AH(s) = Q_E(s) - \left(\frac{1}{R}\right)H(s) \Rightarrow \left(A + \frac{1}{R}\right)H(s) = Q_E(s)$$

$$\frac{H(s)}{Q_E(s)} = \frac{R}{(AR)s + 1} = \frac{K_{Proceso}}{(\tau_{Proceso})s + 1}$$

$$\tau_{Proceso} = 60 \quad \text{y} \quad K_{Proceso} = 10$$

$$t_{s(2\%)} = 4\tau_{Proceso} \Rightarrow t_{s(2\%)} = 240$$

$$h(\infty) = K_{Proceso} * M = 10 * 1 \Rightarrow h(\infty) = 10$$

**b)** Conocidas la constante de tiempo y la ganancia del proceso se puede utilizar la expresión que representará la variación de la altura en el tiempo, Ec. 1.6, para obtener lo solicitado.

$$h(120) = (10)(2) \left(1 - e^{-120/60}\right) \Rightarrow h(120) = 17,3$$

**c)**

$$h(\infty) = K_{Proceso} * M = 10 * 2 \Rightarrow h(\infty) = 20$$

$$h_{80\%}(t) = 16 \Rightarrow 16 = 20 * \left(1 - e^{-t/60}\right)$$

$$\left(1 - e^{-t/60}\right) = 0,8 \Rightarrow e^{-t/60} = 0,2$$

$$t = -60 * \ln(0,2) \Rightarrow t = 96,56$$

d) El esquema de control de retroalimentación simple y su diagrama de bloques se muestran en la Figs. 1.12 (a) y (b), respectivamente. Los valores de la constante de tiempo y del valor del establecimiento se obtienen a partir de la función de transferencia a lazo cerrado tal como sigue.

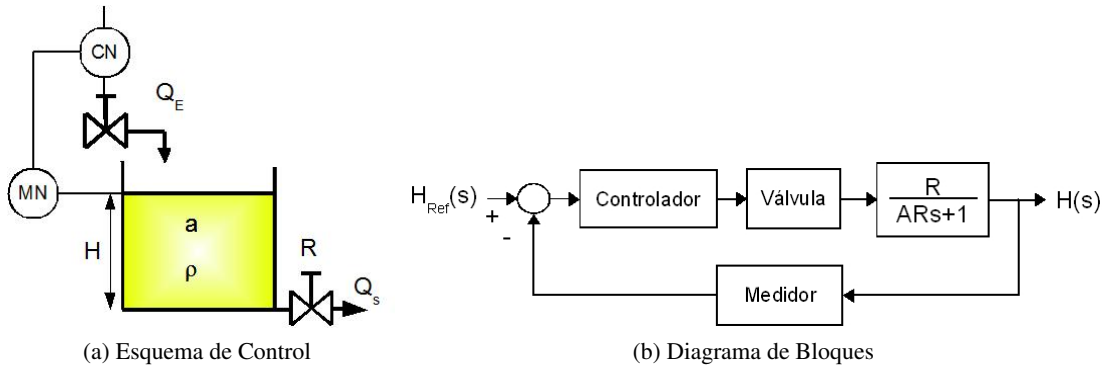


Figura 1.12: Control de Altura

$$\frac{H(s)}{H_{ref}(s)} = \frac{\frac{R}{ARs+1}}{1 + \frac{R}{ARs+1}} = \frac{\frac{R}{ARs+1}}{\frac{ARs+1+R}{ARs+1}} = \frac{\frac{R}{1+R}}{\frac{AR}{1+R}s + 1} = \frac{K_{LC}}{\tau_{LC}s + 1} \quad (1.24)$$

$$\tau_{LC} = \frac{AR}{1+R} = \frac{6}{11} \quad \text{y} \quad h(\infty) = K_{LC} \cdot (1) = \left( \frac{R}{1+R} \right) = \frac{10}{11}$$

e) Finalmente, se puede observar en la función de transferencia a lazo cerrado, mostrada en la Ec. 1.24, que, a medida que aumenta el área, la constante de tiempo aumenta y el valor del establecimiento no se modifica. En tanto que, a medida que aumenta la resistencia, la ganancia tiende a uno, por lo que el valor del establecimiento tenderá al valor de la entrada y la constante de tiempo aumenta hasta cierto punto en el cual una modificación de la resistencia no presentaría mayor modificación de la rapidez de la respuesta.

Como se pudo observar en el ejemplo anterior, el conocimiento teórico de la respuesta de un proceso sirve como herramienta para su análisis y su posible modificación en base a los parámetros físicos del proceso. Así mismo, también es posible realizar lo que se conocerá con el nombre de identificación temporal de un proceso, lo cual permite obtener una aproximación de la función de transferencia de un proceso sin realizar previamente un modelo fenomenológico. Para ello es necesario conocer la respuesta temporal del proceso ante una entrada conocida, con lo que se realizará dicha identificación. A continuación se muestra un ejemplo que permite comprender a plenitud el procedimiento antes mencionado.

**Ejemplo 1.3** Un sistema a lazo abierto cuya función de transferencia  $G(s)$  es desconocida, es sometido a una perturbación en su entrada  $R(s)$  tipo escalón de magnitud 3, ante la cual presenta una salida tal como la que se muestra en la Fig. 1.13. En base a dicha información, identifique la función de transferencia a lazo abierto,  $G(s)$ .

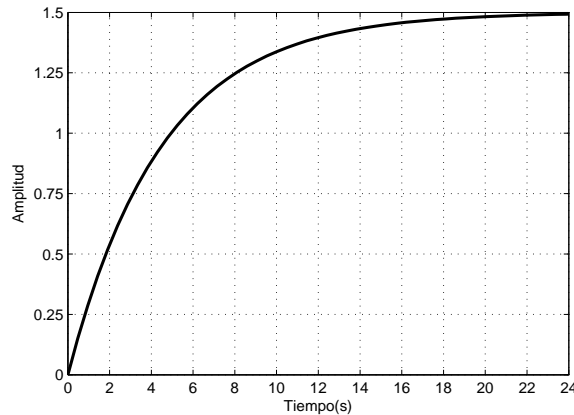


Figura 1.13: Respuesta Temporal ante escalón de magnitud 3

**Solución**

La respuesta que se observa es exponencial sin ninguna oscilación, razón por la cual se aproximará la función de transferencia a la función de un sistema de primer orden de tipo cero pues si fuese de tipo uno la respuesta crecería indefinidamente. Los parámetros de dicha función se calcularán a partir de la información que se obtiene de la respuesta tal como sigue.

$$\begin{aligned} c(\infty) &= KM & 1,5 &= K * 3 & \Rightarrow & K = 0,5 \\ c(\tau) &= 0,632 * c(\infty) & c(\tau) &= 0,948 & \Rightarrow & \tau = 4,5 \end{aligned}$$

La identificación de la constante de tiempo se realiza gráficamente, tal como se mostró en la Fig. 1.3, conocido  $c(\tau)$  se ubica el tiempo al cual ocurre. Por lo tanto, la función de transferencia a la cual se aproximará el sistema será la siguiente.

$$G(s) = \frac{0,5}{4,5s + 1}$$

**Ejemplo 1.4** En el sistema de control de un proceso de preformado que se muestra en la Fig. 1.14, se desea mantener la temperatura de salida  $T$  [ $^{\circ}\text{C}$ ] en un valor dado, manejando la presión  $P$  [ $\text{psi}$ ]. Con la intención de poder evaluar los parámetros propios del proceso, se produce una variación en dicha presión igual a 10 psi, obteniéndose una respuesta en la temperatura tal como se muestra en la Fig. 1.15. A partir de allí se desea que usted realice lo siguiente:

a) Identifique los valores de  $M$  y  $N$ .

b) Una vez identificados dichos valores calcule el valor que debe tener la ganancia del controlador,  $K_c$ , tal que el sistema de control tenga un tiempo de establecimiento al 2% igual a 2 seg.

c) Obtenga además, el valor de establecimiento de la temperatura, ante un escalón unitario, para el valor de  $K_c$  calculado anteriormente

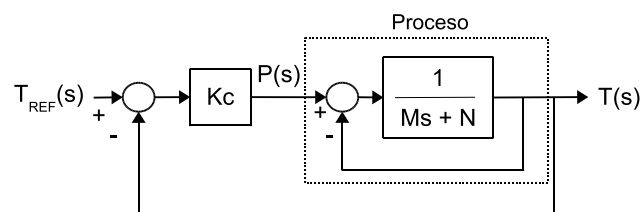


Figura 1.14: Diagrama de bloques del esquema de control

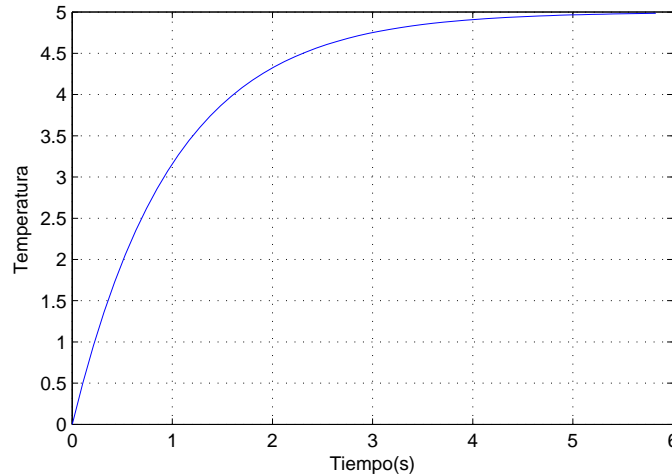


Figura 1.15: Respuesta temporal del proceso

**Solución**

a) La respuesta temporal del proceso se utiliza para identificar la función de transferencia del mismo, la cual se aproximará a un sistema de primer orden debido a la forma exponencial de la curva. Leyendo de la gráfica el valor del establecimiento y del tiempo que transcurrió para alcanzar el 63,2% del valor final, se hace posible la determinación de la ganancia y de la constante de tiempo del proceso, tal como sigue.

$$T(\infty) = 5 = 10K \quad \Rightarrow \quad K = 0,5$$

$$T(\tau) = 0,632 * 5 = 3,16 \quad \Rightarrow \quad \tau \cong 1$$

La función de transferencia del proceso se obtiene en función de  $M$  y  $N$  reduciendo el pequeño diagrama de bloques que conforma al proceso, tal como se muestra a continuación.

$$Gp(s) = \frac{1}{Ms + N + 1} = \frac{\frac{1}{N+1}}{\left(\frac{M}{N+1}\right)s + 1}$$

$$K = \frac{1}{N+1} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad N = 1$$

$$\tau = \frac{M}{N+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad M = 2$$

b) Conocida la función de transferencia del proceso es posible calcular el tiempo de establecimiento del sistema de control en función del parámetro del controlador desarrollando la función de transferencia a lazo cerrado, es decir, reduciendo el diagrama de bloques del esquema de control.

$$G_{LC}(s) = \frac{T(s)}{T_{REF}(s)} = \frac{0,5K_c}{s + 1 + 0,5K_c} = \frac{\frac{0,5K_c}{1+0,5K_c}}{\left(\frac{1}{1+0,5K_c}\right)s + 1}$$

$$t_{s(2\%)} = 4\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{1+0,5K_c} = 2 \quad \Rightarrow \quad K_c = 2$$

c) El valor del establecimiento para la temperatura será igual a la ganancia del sistema de control pues la magnitud del escalón es unitaria.

$$T(\infty) = \frac{0,5K_c}{1 + 0,5K_c} = 0,5$$

## 1.4. Sistemas de Segundo Orden

Los sistemas de segundo orden presentan dos variables que caracterizan su respuesta, tal como se definió previamente, por lo que su función de transferencia presentará un denominador de segundo grado y podrá ser de tipo 0 o de tipo I, según el número de polos en el origen que tenga.

La función de transferencia para sistemas de segundo orden de tipo 0 puede ser escrita en forma general tal como se muestra en la Ec. 1.25, en la cual  $K$  se conoce como la ganancia del sistema,  $\zeta$  como el coeficiente de amortiguación y  $\omega_n$  como la frecuencia natural del sistema.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.25)$$

El comportamiento dinámico de un sistema de segundo orden se describe en términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , los cuales estarán en función de los parámetros físicos del sistema. Así mismo, la respuesta permanente dependerá del valor de la ganancia tal como en el caso de los sistemas de primer orden. Según el valor del coeficiente de amortiguamiento los sistemas de segundo orden se clasifican como sigue.

- Sistemas Subamortiguados para ( $0 < \zeta < 1$ )
- Sistemas Críticamente Amortiguados para ( $\zeta = 1$ )
- Sistemas Sobreamortiguados para ( $\zeta > 1$ )

A continuación se presentarán las respuestas exactas del sistema bajo estudio ante una entrada escalón de magnitud  $M$ , las cuales dependerán del amortiguamiento del sistema. Para la obtención de dichas respuestas se sigue el mismo procedimiento que se describió para el caso de los sistemas de primer orden.

**Sistemas Subamortiguados** ( $0 < \zeta < 1$ )

$$c(t) = KM \left( 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\omega_d t \right) \right) \quad (1.26)$$

La respuesta transitoria tiene una frecuencia de oscilación igual a  $\omega_d$  que se conoce como la frecuencia natural amortiguada del sistema y viene dada por la expresión que se muestra en la Ec. 1.27.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.27)$$

**Sistemas Críticamente Amortiguados** ( $\zeta = 1$ )

$$c(t) = KM (1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)) \quad (1.28)$$

Se puede apreciar que esta respuesta no será oscilatoria sino de tipo exponencial, por lo que se parecerá a la respuesta del sistema de primer orden.

**Sistemas sobreamortiguados** ( $\zeta > 1$ )

$$c(t) = KM \left( 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right) \quad (1.29)$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son las soluciones de la ecuación característica, o denominador de la función de transferencia, las cuales se muestran en las Ecs. 1.30 y 1.31 respectivamente.

$$s_1 = \omega_n \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.30)$$

$$s_2 = \omega_n \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.31)$$

Esta respuesta incluye dos términos de caída exponencial, pero cuando  $\zeta \gg 1$ , uno de los dos términos se hace despreciable frente al otro y puede utilizarse la solución aproximada, que se muestra en la Ec. 1.32, despreciando  $s_1$ , pues  $|s_1| \gg |s_2|$  y la exponencial respectiva desaparecerá o decaerá mucho más rápido que la otra.

$$c(t) = KM \left( 1 - e^{-\zeta \omega_n \left( 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} \right) t} \right) \quad (1.32)$$

Para tres diferentes valores de  $\zeta$ , menor, igual y mayor que uno, se muestra en la Fig. 1.16 la respuesta del sistema de segundo orden bajo estudio, ante un escalón un escalón unitario. En la misma puede observarse, que la respuesta de los sistemas críticamente amortiguado y sobreamortiguado resultan semejantes a la respuesta de los sistemas de primer orden, es decir, son respuestas que crecerán en forma exponencial hasta alcanzar su establecimiento en un valor igual a  $KM$ , por lo que podrán ser caracterizadas a través de su ganancia y del aproximado de su constante de tiempo. Solamente, para el caso de los sistemas subamortiguados, la respuesta presentará oscilaciones para finalmente establecerse igualmente en  $KM$ . Es por ello que a continuación se realizará un análisis detallado de las respuesta de estos últimos.

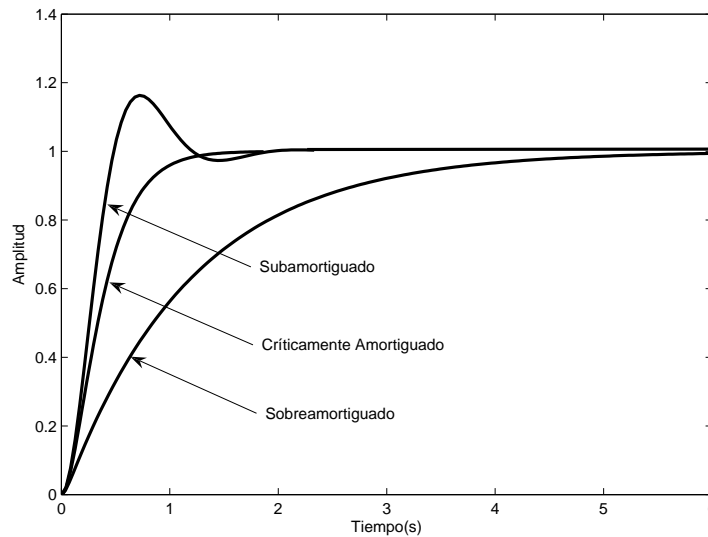


Figura 1.16: Respuesta Sistemas de Segundo Orden

#### 1.4.1. Características de la Respuesta de un Sistema Subamortiguado

Para poder realizar un análisis de la respuesta de un sistema subamortiguado debe caracterizarse la misma en función de su ganancia, su factor de amortiguamiento y su frecuencia natural. En la Fig. 1.17 se muestra la respuesta al escalón para diferentes valores de  $\zeta$ , donde puede apreciarse que, a medida que disminuye  $\zeta$ , el pico que presenta la respuesta aumenta y su tiempo de establecimiento también.

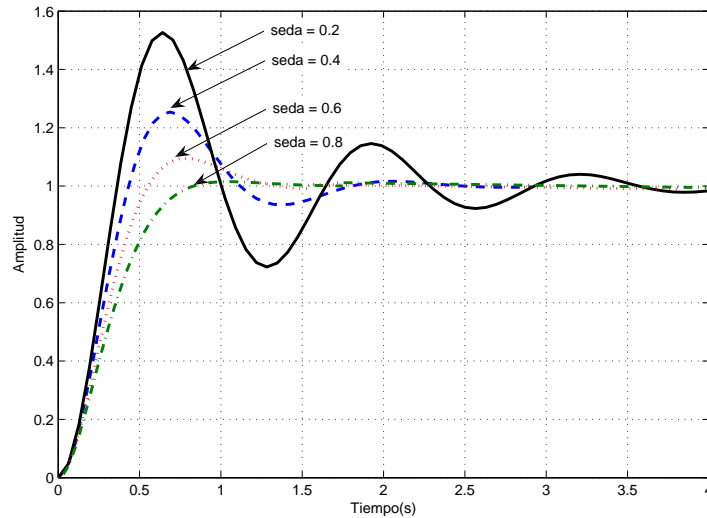


Figura 1.17: Variación de la respuesta para diferentes  $\zeta$

Dicha respuesta será caracterizada en función de ciertos valores que se mencionan a continuación, los cuales pueden apreciarse en la Fig. 1.18.

- Tiempo de crecimiento ( $tr$ ): tiempo en que la respuesta crece de un 10% a un 90% de su valor final.
- Máximo pico ( $Mp$ ): valor de máximo pico medido referencialmente desde el valor final.
- Tiempo de pico ( $tp$ ): tiempo en alcanzar el máximo pico.
- Tiempo de establecimiento ( $ts$ ): tiempo necesario para que la respuesta sólo oscile entre un 2% o 5% del valor final.

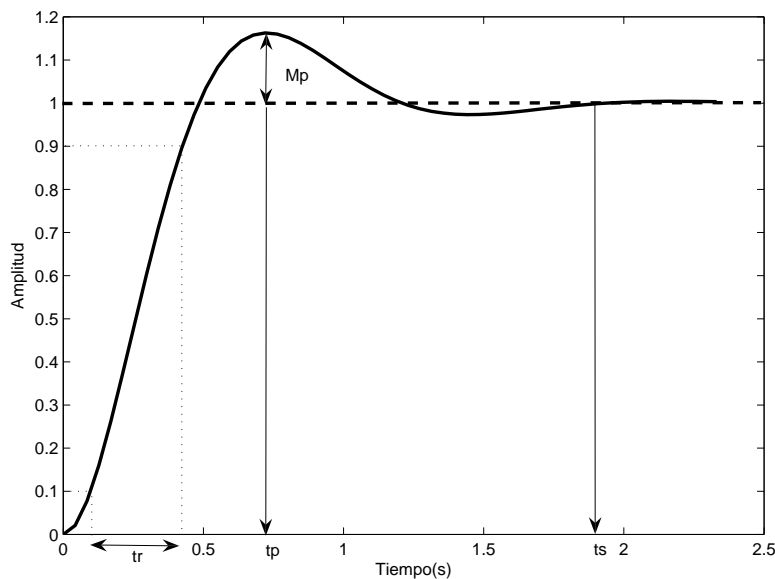


Figura 1.18: Respuesta de un sistema subamortiguado

El valor de las características de dicha respuesta puede expresarse en función de la ganancia, del factor de amortiguamiento y de la frecuencia natural del sistema tal como sigue.

$$tr = \frac{1}{\omega_d} \arctg \left( \frac{-\omega_d}{\zeta \omega_n} \right) \quad (1.33)$$

$$tp = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (1.34)$$

$$Mp = \frac{(C(tp) - C(\infty))}{C(\infty)} = e^{-\left(\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (1.35)$$

$$ts(2\%) = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (1.36)$$

$$ts(5\%) = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (1.37)$$

$$c(\infty) = KM \quad (1.38)$$

De esta forma la respuesta de los sistemas de segundo orden de tipo 0 queda completamente determinada en función de los parámetros característicos de su función de transferencia.

**Ejemplo 1.5** Para un sistema que se ve sometido a una entrada escalón unitario y cuya función de transferencia se muestra en la Ec. 1.39, se desea que usted calcule lo siguiente.

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 1} \quad (1.39)$$

a) El valor de  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $Mp$ ,  $ts_{2\%}$  y valor de establecimiento.

b) Considere ahora que dicha función de transferencia,  $G(s)$ , corresponde con la función de transferencia de lazo abierto de un proceso y se desea conocer como será la respuesta a lazo cerrado para una retroalimentación unitaria. Para ello, calcule el  $Mp$ ,  $ts_{2\%}$  y valor de establecimiento y compárelos con los de lazo abierto que obtuvo previamente.

c) Si se duplicara la ganancia del sistema de lazo abierto, ¿Qué modificaciones presentaría la respuesta a lazo cerrado?

### Solución

a) Para obtener dicha información a partir de la función de transferencia, la misma debe reescribirse de forma tal que sus coeficientes puedan ser igualados a los que presenta la forma general de la función de transferencia que se mostró en la Ec. 1.25. De allí que, igualando coeficientes entre esta ecuación y la ecuación general, se obtienen los valores de los parámetros característicos de la función de transferencia tal como sigue.

$$G(s) = \frac{0,5}{(s^2 + 0,5s + 0,25)} \quad (1.40)$$

$$K\omega_n^2 = 0,5 \quad 2\zeta\omega_n = 0,5 \quad \omega_n^2 = 0,25$$

$$K = 2 \quad \omega_n = 0,5 \quad \zeta = 0,5$$

Conocidos dichos valores es posible calcular el máximo pico, el tiempo de establecimiento y el valor de establecimiento, tal como se muestra a continuación.



$$Mp = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = 0,163 \quad ts_{2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 16 \quad c(\infty) = KM = 2$$

b) Para obtener lo solicitado se debe desarrollar la función de transferencia a lazo cerrado tal como sigue,

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{0,5}{(s^2+0,5s+0,25)}}{1 + \frac{0,5}{(s^2+0,5s+0,25)}} = \frac{0,5}{s^2 + 0,5s + 0,75} \quad (1.41)$$

De igual forma que en el caso anterior, se iguala dicha función de transferencia con la forma general mostrada en la Ec. 1.25 y se obtiene lo deseado.

$$K_{LC}\omega_{nLC}^2 = 0,5 \quad 2\zeta_{LC}\omega_{nLC} = 0,5 \quad \omega_{nLC}^2 = 0,75$$

$$K_{LC} = 0,66 \quad \omega_{nLC} = 0,86 \quad \zeta_{LC} = 0,288$$

$$Mp_{LC} = 0,388 \quad ts_{2\%_{LC}} = 16 \quad c(\infty) = 0,66$$

Como se puede apreciar el sistema a lazo cerrado presenta modificaciones en su respuesta, mantiene el tiempo de establecimiento pero tiene un menor factor de amortiguación, lo que aumenta su máximo pico desmejorando su respuesta transitoria. En cuánto a su respuesta permanente, su establecimiento se acerca un poco más al valor de la entrada.

c) Se le añade la ganancia al lazo abierto y se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{2(0,5)}{(s^2+0,5s+0,25)}}{1 + \frac{2(0,5)}{(s^2+0,5s+0,25)}} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1,25}$$

$$K_{LC}\omega_{nLC}^2 = 1 \quad 2\zeta_{LC}\omega_{nLC} = 0,5 \quad \omega_{nLC}^2 = 1,25$$

$$K_{LC} = 0,8 \quad \omega_{nLC} = 1,11 \quad \zeta_{LC} = 0,223$$

$$Mp_{LC} = 0,486 \quad ts_{2\%_{LC}} = 16 \quad c(\infty) = 0,8$$

Como puede apreciarse, al aumentar la ganancia de lazo abierto, la respuesta transitoria desmejora pues su máximo pico también aumenta, en tanto que el tiempo de establecimiento no se altera. En cuánto a la respuesta permanente se puede decir que mejora, pues el valor del establecimiento se acerca cada vez más al valor de la entrada.

Los sistemas de segundo orden también pueden ser de tipo I y presentarían una función de transferencia, que en forma general, puede ser escrita tal como se muestra en la Ec. 1.42.

$$G(s) = \frac{K_{LA}}{s(\tau_{LA}s + 1)} \quad (1.42)$$

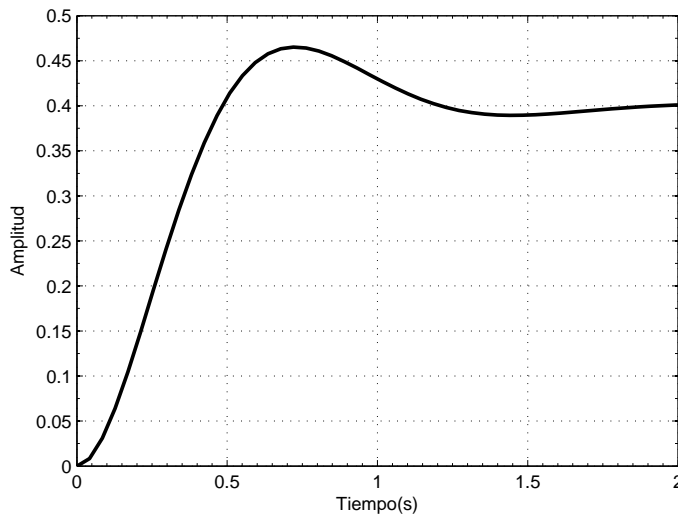
Al igual que para los sistemas de primer orden tipo I, su respuesta a lazo abierto ante una entrada acotada no presenta un valor de establecimiento, por lo que solamente su respuesta a lazo cerrado será analizada en detalle partiendo de la función de transferencia que se muestra en la Ec. 1.43.

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{K_{LA}}{s(\tau s + 1)}}{1 + \frac{K_{LA}}{s(\tau s + 1)}} = \frac{\frac{K_{LA}}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K_{LA}}{\tau}} = \frac{K_{LC}\omega_{nLC}^2}{s^2 + 2\xi_{LC}\omega_{nLC}s + \omega_{nLC}^2} \quad (1.43)$$

A partir de dicha ecuación se puede concluir que un sistema de segundo orden de tipo I a lazo cerrado tendrá una función de transferencia semejante a la que se muestra en la Ec. 1.25, por lo que su respuesta podrá ser analizada en forma semejante. En principio, resalta el hecho de que la ganancia será igual a uno independiente de los parámetros de la función, por lo que su respuesta a lazo cerrado ante una entrada escalón, presentará un valor de establecimiento igual a la magnitud del escalón, tal y como resultó con los sistemas de primer orden de tipo I.

Cabe destacar que, en cuanto a la identificación temporal de un sistema de segundo orden, esto será posible para el caso de sistemas subamortiguados, cuya respuesta permite un reconocimiento sencillo de los parámetros característicos de la función de transferencia, pero en el caso que los sistemas sean críticamente amortiguados o sobreamortiguados y presenten una respuesta de tipo exponencial, los mismos solamente podrán ser identificados como sistemas de primer orden. Es importante recordar que la identificación temporal es un procedimiento muy sencillo que permite obtener una aproximación de la función de transferencia de un proceso pero que presentará como limitación lo mencionado anteriormente.

**Ejemplo 1.6** *Un sistema a lazo abierto que fue sometido a una perturbación de tipo escalón de magnitud 2, presentó una respuesta como la que se muestra en la Fig. 1.19. En base a dicha información, identifique la función de transferencia.*



(a) Respuesta Temporal

Figura 1.19: Respuesta temporal de  $G(s)$  ante una perturbación escalón de magnitud 2

**Solución**

Ante una entrada del tipo escalón, con una magnitud igual a 2, se observa una respuesta oscilatoria que logra establecerse en un valor final, razón por la cual se aproximará la función de transferencia a la función de un sistema de segundo orden subamortiguado. Por ser una respuesta a lazo abierto la función de transferencia debe ser de tipo cero, pues si fuese de tipo uno la respuesta crecería indefinidamente. Finalmente la forma de la función de transferencia aproximada será igual a la presentada previamente en la Ec. 1.25, pudiéndose calcular los parámetros de dicha función a partir de la información que ofrece la gráfica. Se sabe que el valor del establecimiento es igual al valor de la ganancia por la magnitud del escalón y que los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$  pueden ser calculados a partir del valor del  $M_p$  y del  $t_p$ . De allí que, la identificación de la función de transferencia solicitada quedaría como sigue.

$$c(\infty) = KM = 0,4 \Rightarrow K = \frac{0,4}{2} \Rightarrow K = 0,2$$

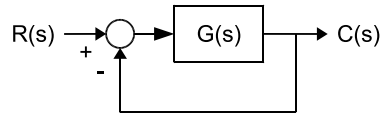
$$M_p = \left( \frac{0,47-0,4}{0,4} \right) = 0,175 \Rightarrow \zeta = 0,49$$

$$t_p = 0,7 \Rightarrow \omega_n = 5,13$$

Por lo tanto, la función de transferencia a la cual se aproximará el sistema será la que se muestra a continuación.

$$G(s) = \frac{5,26}{s^2 + 4,97s + 26,34}$$

**Ejemplo 1.7** Considere un esquema de control como el que se muestra en la Fig. 1.20, que al ser sometido a un escalón de magnitud 0,4 en su referencia, presenta una respuesta en su salida igual a la del ejemplo anterior, es decir a la mostrada en la Fig. 1.19. A partir de allí, se solicita identificar la función de transferencia  $G(s)$ .



(a) Lazo de Control

Figura 1.20: Esquema de Control

### Solución

Ante una entrada del tipo escalón de magnitud  $M = 0,4$ , se observa una respuesta oscilatoria que logra establecerse en un valor final igual a la entrada, razón por la cual se puede concluir que la función de transferencia a lazo abierto,  $G(s)$ , puede aproximarse a un sistema de segundo orden de tipo I, es por ello que la forma de la función de transferencia aproximada será igual a la presentada previamente en la Ec. 1.42.

A partir de la respuesta conocida es posible identificar a la función de transferencia a lazo cerrado, donde el  $M_p$  y el  $t_p$  son los mismos del ejercicio anterior, por lo que  $\xi$  y  $\omega_n$  del lazo cerrado serán iguales a los determinados anteriormente. En cuanto a la ganancia, debido a que la salida tiende a establecerse en el mismo valor que la entrada, la ganancia será uno, quedando la función de transferencia a lazo cerrado como sigue.

$$G_{LC}(s) = \frac{26,34}{s^2 + 4,97s + 26,34}$$

Conocida la función de transferencia a lazo cerrado, es posible calcular la función de transferencia del lazo abierto,  $G(s)$ , utilizando dos metodologías que se muestran a continuación.

### Método 1

Se despeja la función de transferencia a lazo a abierto en función de la de lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$G(s) = \frac{G_{LC}(s)}{1 - G_{LC}(s)} = \frac{\frac{26,34}{s^2 + 4,97s + 26,34}}{1 - \frac{26,34}{s^2 + 4,97s + 26,34}} = \frac{26,34}{s^2 + 4,97s} = \frac{5,29}{s(0,2s + 1)}$$

### Método 2

Se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado partiendo de la función de transferencia a lazo abierto y por igualación de coeficientes se obtienen los parámetros a lazo abierto.

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{K_{LA}}{s(\tau_{LA}s + 1)}}{1 + \frac{K_{LA}}{s(\tau_{LA}s + 1)}} = \frac{\frac{K_{LA}}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K_{LA}}{\tau}} = \frac{K_{LC}\omega_{nLC}^2}{s^2 + 2\zeta_{LC}\omega_{nLC}s + \omega_{nLC}^2} = \frac{26,34}{s^2 + 4,97s + 26,34}$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{LA}}{\tau} &= 26,34 & \frac{1}{\tau} &= 4,97 \\ K_{LA} &= 5,29 & \tau &= 0,2 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{5,29}{s(0,2s+1)}$$

## 1.5. Localización de las Raíces en el Plano y su Influencia en la Respuesta Transitoria

La respuesta transitoria de un sistema depende de la función de transferencia del mismo y de la entrada a la cual se vea sometido, tal como se pudo apreciar en la sección anterior, pero es posible tener una buena aproximación de dicha respuesta utilizando solamente la ecuación característica del sistema. Para ello se analizará, en esta sección, la influencia que tienen la ubicación de las raíces de la ecuación característica de un sistema en el plano  $s$ .

En la Ec. 1.44 se muestra una forma general de la función de transferencia de un sistema, en la cual  $f_1(s)$  y  $f_2(s)$  son polinomios de  $s$ , donde las soluciones de  $f_1(s)$  se conocen como los ceros del sistema y las soluciones de  $f_2(s)$  como los polos, los cuales coinciden con las raíces de la ecuación característica del sistema.

$$G(s) = \frac{f_1(s)}{f_2(s)} \quad (1.44)$$

A continuación se mostrará de que forma la respuesta transitoria de un sistema depende del número de polos del mismo y de su ubicación en el Plano  $s$ , independiente de si trata de un sistema a lazo abierto o a lazo cerrado. Se analizarán detalladamente de que forma la ubicación de las raíces determina la respuesta transitoria de los sistemas de primer y segundo orden y se mostrará como podrá ser analizada la respuesta transitoria para sistemas de orden superior.

### 1.5.1. Sistemas de Primer Orden

Como se mencionó anteriormente la respuesta dependerá de los polos del sistema y para un sistema de primer orden solamente se tiene una solución de la ecuación característica, por lo que la respuesta dependerá de la ubicación de dicho polo. A partir de la función de transferencia escrita en forma general, que se mostró en la Ec. 1.3, la ecuación característica será la que se muestra a continuación.

$$\tau s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{\tau} \quad (1.45)$$

Como puede observarse la ubicación del polo solo dependerá del valor de la constante de tiempo  $\tau$ , mientras mayor sea la misma su rapidez de respuesta será menor y el polo se encontrará más cerca del eje imaginario. Si se comparan tres sistemas de primer orden cuyas constantes de tiempo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  cumplen con la relación  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ , los polos podrán ser representados en el Plano  $s$  como se muestra en la Fig. 1.21.

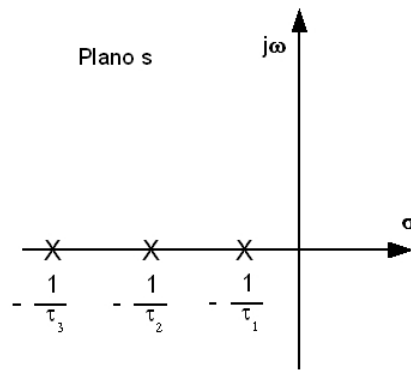


Figura 1.21: Ubicación en el Plano Sistemas de Primer Orden

Tal como se mencionó anteriormente, se puede observar que dependiendo del valor de la constante de tiempo la raíz se ubicará más cerca o más lejos del eje imaginario, lo que dará una indicación de la rapidez de la respuesta del sistema. Mientras más cerca del eje imaginario se encuentren las raíces, más tiempo tardará el sistema en establecerse. Esto último puede reforzarse si utilizamos las expresiones del tiempo de establecimiento que fueron previamente definidas por las Ecs. 1.12 y 1.13, en las cuales es claro que, a medida que aumenta la constante de tiempo, el tiempo de establecimiento también aumenta. Adicionalmente, en la Fig. 1.4 (a), que se mostró anteriormente, se observa la influencia de la constante de tiempo o ubicación de la raíz en el plano, sobre la respuesta transitoria, en la cual, tal como era de esperarse, a medida que el polo del sistema se encuentra más cerca del eje imaginario mayor es el tiempo de establecimiento del sistema.

### 1.5.2. Sistemas de Segundo Orden

Las soluciones de la ecuación característica o polos del sistema, para el caso de sistemas de segundo orden, quedan expresadas en función de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , tal como se aprecia en la Ec. 1.46. Dichas soluciones serán reales o conjugadas dependiendo del valor de  $\zeta$ .

$$s = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.46)$$

Cuando  $\zeta > 1$ , los polos serán reales y diferentes y a medida que aumenta  $\zeta$  se separarán más. Cuando  $\zeta = 1$ , los polos serán reales e iguales y cuando  $\zeta < 1$ , los polos serán un par de raíces conjugadas. En los dos primeros casos la respuesta transitoria estará compuesta por la contribución de dos polos reales y podrá ser aproximada al polo que se encuentre más cerca del eje imaginario, por ser aquel cuyo tiempo de establecimiento perdura más. Para el caso de los sistemas subamortiguados, se detalla en la Fig. 1.22 la correspondencia que tiene la ubicación de las raíces con los parámetros característicos del sistema, es decir, con  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

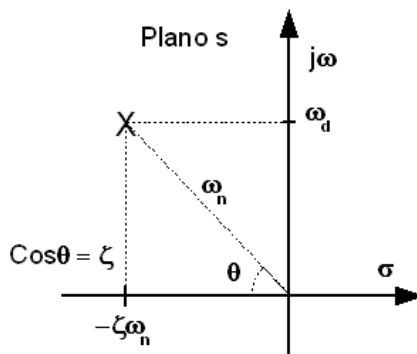


Figura 1.22: Ubicación de las raíces de un sistema de segundo orden

Así mismo, en la Fig. 1.23, se resaltan las características que compartirían diferentes sistemas de segundo orden según la ubicación de sus raíces en el Plano  $s$ . Aquellos sistemas cuyos polos se encuentran sobre las líneas punteadas comparten la característica temporal señalada. Por ejemplo, para tres sistemas cuyas raíces sean las destacadas como A, B y C, el tiempo de establecimiento para los tres sistemas será el mismo. Cabe destacar que, para facilitar la comprensión, en dicha figura solamente se muestra la parte positiva del polo de cada sistema.

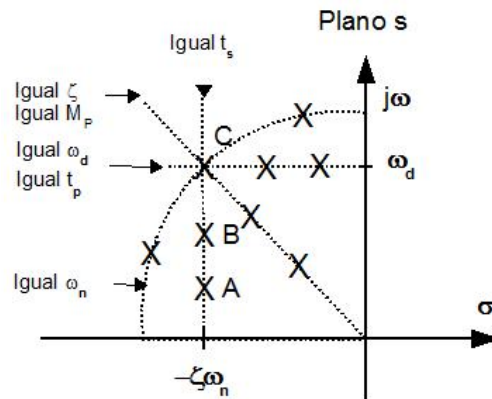


Figura 1.23: Comparación sistemas de segundo orden (Raíces en el Plano  $s$ )

### 1.5.3. Sistemas de Orden Superior

Los sistemas de orden superior podrán ser estudiados aproximando su respuesta transitoria a aquella que sería gobernada por sus polos dominantes, tal como se muestra en los siguientes casos.

Si se considera un sistema de tercer orden, cuyos polos fuesen los mostrados en la Fig. 1.21, se puede concluir que la respuesta transitoria de dicho sistema estará dominada por el polo que se encuentra más cerca del eje imaginario, pues dicho polo será el último en establecerse. A manera de ejemplo se puede observar en la Fig. 1.24 la comparación de la respuesta de un sistema de primer orden y uno de tercer orden, cuyas funciones de transferencia se muestran en las Ecs. 1.47 y 1.48, respectivamente.

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)} \quad (1.47)$$

$$G(s) = \frac{400}{(s+20)(s+10)(s+2)} \quad (1.48)$$

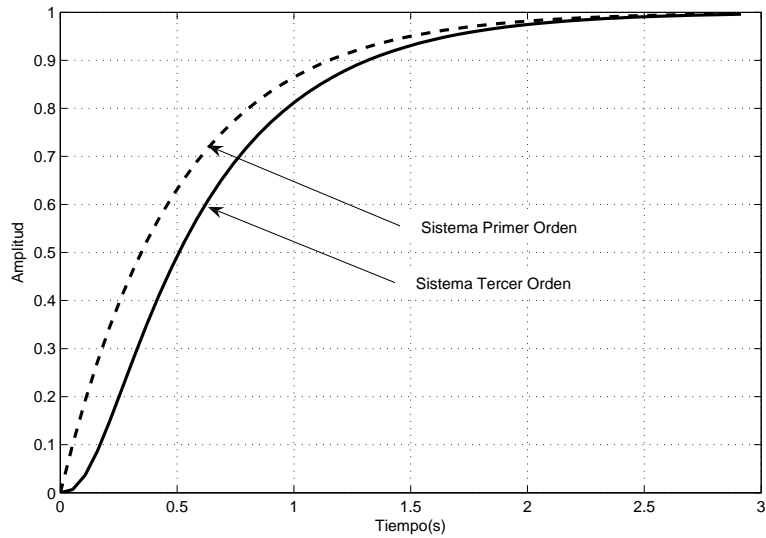


Figura 1.24: Comparación de las Respuestas de un Sistema de Primer Orden y otro de Tercer Orden

Como puede observarse la respuesta transitoria del sistema de tercer orden es similar a la del sistema de primer orden, pues está dominada por el polo que se encuentra más cerca del eje imaginario, es decir, su polo dominante, el cual coincide con el polo del sistema de primer orden.

Adicionalmente se puede observar en la Fig. 1.25 la ubicación de las raíces en el plano de un sistema de cuarto orden cuya función de transferencia es la que se muestra en la Ec. 1.49. Como puede observarse, existen un par de polos que se encuentran mucho más cerca del eje imaginario que los otros dos, por lo que podrían ser considerados como polos dominantes.

$$G(s) = \frac{1224}{(s^2 + 2s + 17)(s^2 + 12s + 72)} \quad (1.49)$$

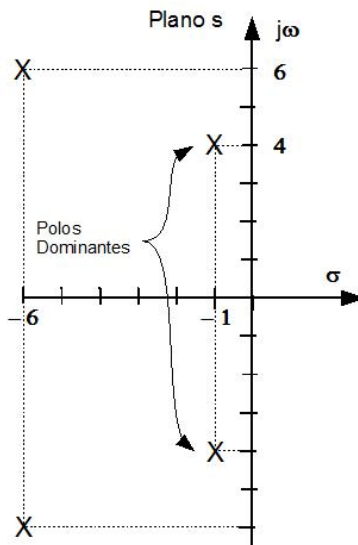


Figura 1.25: Polos en el Plano s de un sistema de cuarto orden

Con la intención de verificar lo aceptable de la aproximación de la respuesta transitoria a sus polos dominantes, se muestra en la Fig. 1.26 la respuesta ante el escalón unitario del sistema completo y de cada uno de los sistemas de segundo orden que lo componen, garantizándose en todos los casos que la ganancia fuese unitaria para lograr una mejor comparación visual entre las respuestas mostradas.

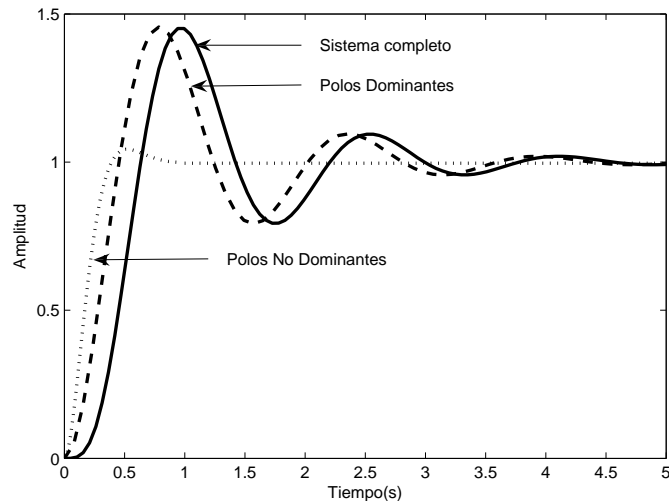


Figura 1.26: Comparación entre la respuesta de un sistema de cuarto orden

Como puede observarse la respuesta transitoria del sistema completo es bastante similar a la respuesta del sistema de segundo orden que tiene como soluciones a los polos dominantes del sistema de cuarto orden. De allí que se puede concluir que la respuesta del sistema completa podrá ser aproximada a la de sus polos dominantes.

Partiendo de lo mencionado anteriormente en lo que respecta a la respuesta transitoria, se puede considerar un sistema de control a lazo cerrado como el que se muestra en la Fig. 1.27, donde  $G_c(s)$ ,  $G_a(s)$ ,  $G_p(s)$  y  $G_m(s)$  representan en forma general las funciones de transferencia del controlador, actuador, proceso y medidor respectivamente y analizar su respuesta transitoria a partir de su ecuación característica, Ec. 1.50. Como puede apreciarse dicha ecuación dependerá de todas funciones de transferencia mencionadas previamente, por lo que la respuesta también dependerá de ellas, pero como en los sistemas de control las funciones de transferencia del actuador, proceso y medidor, generalmente, no son modificables, la respuesta del sistema de control dependerá exclusivamente del controlador que se añada, por lo que se puede concluir que es posible ajustar la forma y los parámetros de un controlador específico de forma tal que se tenga la respuesta deseada.

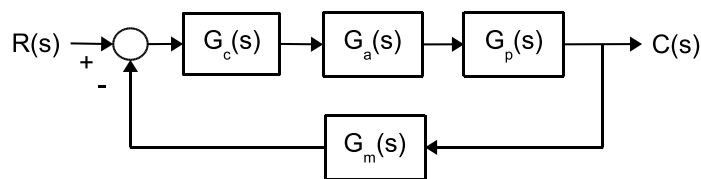


Figura 1.27: Sistema de Control

$$1 + G_c(s)G_a(s)G_p(s)G_m(s) = 0 \tag{1.50}$$

Habiendo realizado los análisis pertinentes al estudio de la respuesta transitoria, a continuación se realizará el estudio del error en estado estacionario.



## 1.6. Error en estado estacionario

La respuesta permanente es aquella que se alcanza cuando el sistema se establece y es muy importante su estudio pues informa lo que sucede con la salida permanente una vez que el sistema es perturbado. Se pueden tener casos en los cuales, ante una entrada acotada, no se logra un valor de establecimiento constante, siendo éstas situaciones no deseadas, tal como sucede para la respuesta ante el escalón de los sistemas de tipo I.

En secciones anteriores se estudió el valor de establecimiento que alcanzaban distintos tipos de sistemas, en tanto que en esta sección se estudiará la respuesta permanente desde el punto de vista del error del sistema en estado estacionario, el cual solamente está definido para sistemas a lazo cerrado pues corresponde con la diferencia entre la entrada o señal de referencia y la salida del sistema. La señal de referencia es el valor que la salida está siguiendo y si fuese posible se desearía que la diferencia entre ellas fuese cero. Para un sistema con retroalimentación unitaria, como el que se muestra en la Fig. 1.28, el error se expresa según la Ec. 1.51, en la cual  $G(s)$  coincide con la función de transferencia a lazo abierto.

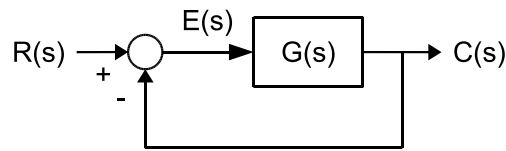


Figura 1.28: Sistema Retroalimentado

$$E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = R(s) - E(s)G(s) \Rightarrow E(s) = R(s) \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \quad (1.51)$$

Conocida la transformada de Laplace del error es posible conocer el valor que alcanza el mismo cuando el tiempo tiende a infinito utilizando el Teorema del Valor Final, de allí se desprende que el error depende de la entrada a la cual sea sometido el sistema a lazo cerrado y de la función de transferencia a lazo abierto.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ R(s) \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] \quad (1.52)$$

A continuación se calcularán los errores en estado estacionario o estado estable para sistemas con diferentes funciones de transferencia a lazo abierto y para diferentes tipos de entrada.

### 1.6.1. Entrada Tipo Escalón

Ante una entrada tipo escalón de magnitud  $M$ , se calcula a continuación el error para distintos casos dependiendo del tipo de la función de transferencia a lazo abierto.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{M}{s} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] = M \left( \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} \right) = M \left( \frac{1}{1 + K_p} \right) \quad (1.53)$$

$K_p$  se conoce como el coeficiente estático de error de posición y su valor dependerá del tipo de la función de transferencia a lazo abierto. Partiendo de la expresión general para  $G(s)$  que se muestra en la Ec. 1.54, el cálculo de  $K_p$  y del error será como sigue.

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots \cdots}{s^T(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1) \cdots \cdots} \quad (1.54)$$

Tipo de $G(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_p$	$e_{ss}$
0 ( $N = 0$ )	$K$	$M \left( \frac{1}{1 + K} \right)$
I ( $N = 1$ )	$\infty$	0
II ( $N = 2$ )	$\infty$	0

Como puede observarse, el error ante el escalón tendrá un valor finito para el caso que la función de transferencia a lazo abierto sea de tipo 0, en tanto que, si el tipo es I o más, el error siempre será cero. En la Fig. 1.29 se puede apreciar la respuesta, ante un escalón unitario, de un sistema a lazo abierto de tipo 0 y tipo I, en la cual se aprecia lo calculado previamente.

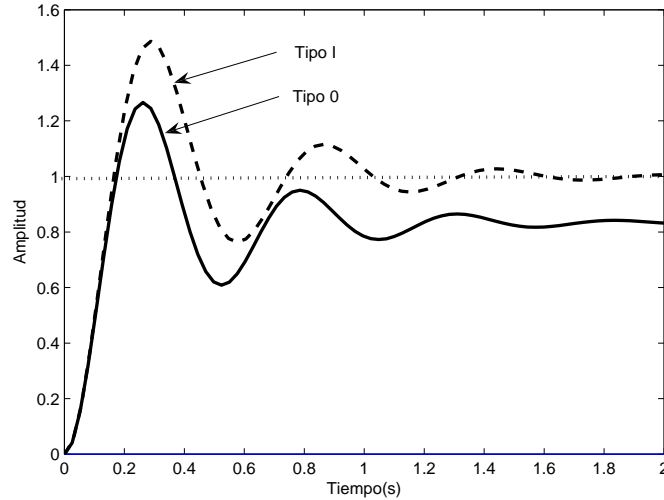


Figura 1.29: Respuesta al Escalón a Lazo Cerrado. Lazo Abierto Tipo 0 y Tipo I

### 1.6.2. Entrada Tipo Rampa

Ante una entrada tipo rampa cuya pendiente sea  $M$ , se calcula a continuación el error para distintos casos dependiendo del tipo de la función de transferencia a lazo abierto.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{M}{s^2} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] = M \left( \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} \right) = M \left( \frac{1}{K_v} \right) \quad (1.55)$$

$K_v$  se conoce como el coeficiente estático de error de velocidad y su valor dependerá del tipo de la función de transferencia a lazo abierto, tal como se muestra a continuación. Tomando la misma expresión general para  $G(s)$  que se mostró en la Ec. 1.54, el cálculo de  $K_v$  y del error será como sigue.

Tipo de $G(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_v$	$e_{ss}$
0 ( $N = 0$ )	0	$\infty$
I ( $N = 1$ )	$K$	$M \left( \frac{1}{K} \right)$
II ( $N = 2$ )	$\infty$	0

Como puede observarse, el error ante la rampa tendrá un valor infinito para el caso que la función de transferencia a lazo abierto sea de tipo 0, para tipo I el error será finito, en tanto que para tipo II o más el error siempre será cero. En la Fig. 1.30 se puede apreciar la respuesta, ante una rampa unitaria, para tres sistemas que a lazo abierto son de tipo 0, de tipo I y de tipo II, en la cual se aprecia lo calculado previamente.

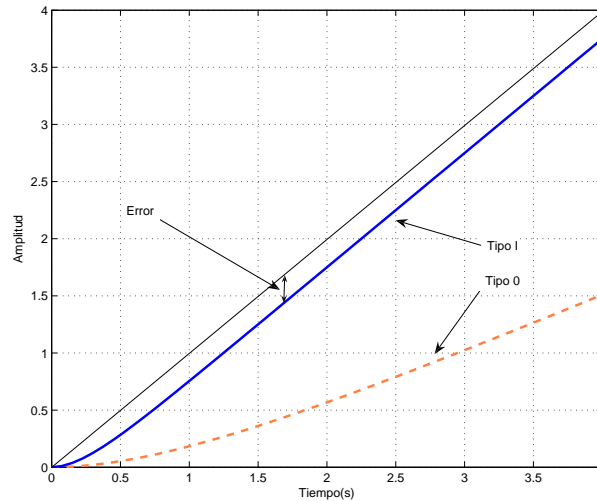


Figura 1.30: Respuesta a la Rampa a Lazo Cerrado. Lazo Abierto Tipo 0, Tipo I y Tipo II

### 1.6.3. Entrada Tipo Parábola

Ante una entrada tipo parábola, se calcula a continuación el error para distintos casos dependiendo del tipo de la función de transferencia a lazo abierto.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{M}{s^3} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] = M \left( \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} \right) = M \left( \frac{1}{K_a} \right) \quad (1.56)$$

$K_a$  se conoce como el coeficiente estático de error de aceleración y su valor dependerá del tipo de la función de transferencia a lazo abierto, tal como se muestra a continuación. Tomando la misma expresión general para  $G(s)$  que se mostró en la Ec. 1.54, el cálculo de  $K_a$  y del error será como sigue.

Tipo de $G(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K_V$	$e_{ss}$
0 ( $N = 0$ )	0	$\infty$
I ( $N = 1$ )	0	$\infty$
II ( $N = 2$ )	$K$	$M \left( \frac{1}{K} \right)$

Como puede observarse, el error ante la parábola tendrá un valor infinito para el caso que la función de transferencia a lazo abierto sea de tipo 0 y de tipo I, en tanto que para tipo II el error será finito y para sistemas de tipo III o más el error será cero.

Finalmente, en la Tabla 1.2 se resume el cálculo de error para diferentes entradas y tipos de sistemas a lazo abierto.

Tipo de $G(s)/R(s)$	Escalón	Rampa	Parábola
0	$\left(\frac{1}{1+K_p}\right)$	$\infty$	$\infty$
I	0	$\left(\frac{1}{K_v}\right)$	$\infty$
II	0	0	$\left(\frac{1}{K_a}\right)$

Cuadro 1.2: Error a la Referencia

**Ejemplo 1.8** Para un sistema de control como el que se mostró en la Fig. 1.28 y cuya función de transferencia a lazo abierto,  $G(s)$ , se describe a continuación, calcule el error a la referencia  $R(s)$ . Suponga que dicha referencia puede ser un escalón, una rampa y una parábola, todas unitarias.

a)  $G(s) = \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8}$

b)  $G(s) = \frac{5s+10}{6s^3+8s^2+7s}$

c)  $G(s) = \frac{3s+4}{(6s+6)s^2}$

**Solución**

a) La función de transferencia a lazo abierto es de tipo 0 pues no presenta ningún polo en el origen, es por ello que el error al escalón será finito, en tanto que el error ante la rampa y ante la parábola serán infinitos, tal como se muestra a continuación.

Error al escalón

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{1 + \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8}} \right) \right] = \left( \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8} \right)} \right) = \left( \frac{1}{1 + \frac{4}{8}} \right) = \frac{2}{3} = 0,66$$

Error a la rampa

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{s^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8}} \right) \right] = 1 \left( \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8} \right)} \right) = \left( \frac{1}{0} \right) = \infty$$

Error a la parábola

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{s^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8}} \right) \right] = 1 \left( \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left( \frac{3s+4}{6s^3+5s^2+2s+8} \right)} \right) = \left( \frac{1}{0} \right) = \infty$$

Como se observa, los errores calculados resultaron tal y como se mencionó con anterioridad, es decir, finito al escalón e infinitos a la rampa y a la parábola. En adelante solamente se calculará el error finito y aquellos que sean cero o infinito no serán calculados pues ya ha quedado ampliamente demostrado cada caso, tal como lo describe la Tabla 1.2.

b) La función de transferencia a lazo abierto es de tipo I, por lo que el error al escalón será cero, a la rampa será finito y a la parábola será infinito. A continuación se muestra el calculo del error a la rampa.

$$e_{ss} = \left( \frac{1}{K_v} \right) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \left( \frac{1}{\frac{10}{7}} \right) = 0,7$$

c) La función de transferencia a lazo abierto es de tipo II, por lo que el error al escalón y a la rampa serán cero y a la parábola será finito. A continuación se muestra el calculo del error a la parábola.

$$e_{ss} = \left( \frac{1}{K_a} \right) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \left( \frac{1}{\frac{4}{6}} \right) = 1,5$$

#### 1.6.4. Error a la Perturbación

Así como se estudió previamente el error a la referencia, también es importante conocer el comportamiento de un sistema ante una perturbación, lo cual se realizará utilizando la Fig. 1.31 (a), en la cual P(s) se considerará una perturbación al proceso y se estudiará su efecto sobre el error.

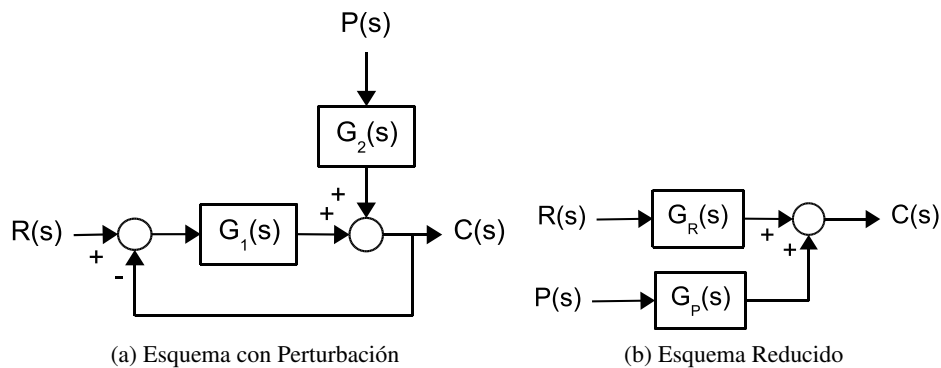


Figura 1.31: Error a la Perturbación

Es necesario obtener la expresión de C(s) en función de ambas entradas, lo cual se realiza a partir del esquema reducido que se muestra en la Fig. 1.31 (b), tal como sigue,

$$C(s) = G_R(s)R(s) + G_P(s)P(s) = C_R(s) + C_P(s) \tag{1.57}$$

donde C<sub>R</sub>(s) es el componente de la salida debido a R(s) y C<sub>P</sub>(s) es el componente de la salida debido a P(s). En función a lo anterior el error puede ser escrito como lo expresa la Ec. 1.58.

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - (C_R(s) + C_P(s)) \tag{1.58}$$

reescribiendo la ecuación anterior, se tiene,

$$E(s) = (R(s) - C_R(s)) - C_P(s) = E_R(s) + E_P(s) \tag{1.59}$$

De esta forma el cálculo del error puede realizarse separando el error debido a la referencia, E<sub>R</sub>(s), y el error debido a la perturbación, E<sub>P</sub>(s). El error debido a la referencia es conocido y se calcula tal como se mostró anteriormente, en tanto que el error debido a la perturbación se calculará utilizando el Teorema del Valor Final como se muestra a continuación.

$$e_{ss_p} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_P(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} sC_P(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} sG_P(s)P(s) \tag{1.60}$$

De allí que será necesario conocer la función de transferencia entre la salida y la perturbación para poder calcular el error debido a la perturbación.

**Ejemplo 1.9** Para un esquema de control cuyo diagrama de bloques se muestra en la Fig. 1.32 se necesita conocer el error a la referencia y a la perturbación considerando que dichas entradas pueden ser un escalón unitario o una rampa unitaria.

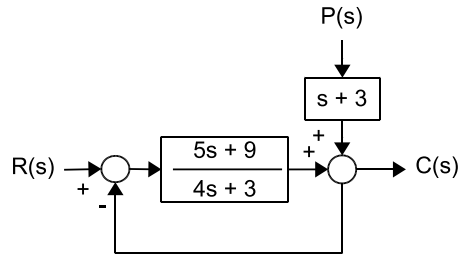


Figura 1.32: Diagrama de Bloques. Error a la Perturbación

**Solución**

El error a la referencia se calcula partiendo del conocimiento de la referencia y de la función de transferencia a lazo abierto, tal como se realizó en el ejemplo anterior. En tanto que, para el error a la perturbación, se necesita conocer la perturbación y la función de transferencia entre la variable de salida y dicha perturbación.

Error a la referencia

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ssR} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{3}{4}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ssR} = \infty$$

Error a la perturbación

Para calcular este error es necesario conocer a la función de transferencia entre  $C(s)$  y  $P(s)$ , es decir  $G_P(s)$ , lo cual se realiza reduciendo el diagrama de bloques correspondiente, tal como se muestra en la Fig. 1.33.

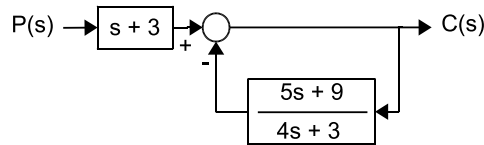


Figura 1.33: Reducción del Diagrama

$$G_P(s) = \frac{(s+3)}{1 + \frac{(5s+9)}{4s+3}} = \frac{(4s+3)(s+3)}{4s+3+5s+9}$$

$$P(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ssP} = -\lim_{s \rightarrow 0} C_P(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{(4s+3)(s+3)}{4s+3+5s+9} \right) \right] = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ssP} = -\lim_{s \rightarrow 0} C_P(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{s^2} \right) \left( \frac{(4s+3)(s+3)}{4s+3+5s+9} \right) \right] = -\infty$$

**1.7. Estabilidad de un Sistema**

Un sistema es estable si, al ser sometido a una entrada acotada, su salida alcanza eventualmente un valor de establecimiento, es decir, si su salida se mantiene en un valor constante o si oscila entre límites acotados. Si por el contrario, la salida del sistema diverge sin límite se considerará al sistema como inestable. Considerando lo anterior, la estabilidad de un sistema es una característica sumamente importante pues determina si un sistema es capaz o no de presentar una respuesta razonable al ser perturbado. Definir a un sistema como estable o no es referirse a su estabilidad absoluta, en tanto que, también se puede hablar de la estabilidad relativa de un sistema cuando se compara su estado de estabilidad con el límite de la misma.

La estabilidad absoluta de un sistema depende de la ubicación de sus polos en el Plano  $s$ , tal como se muestra en la Fig. 1.34, pues si se tiene algún polo en el semiplano derecho su respuesta, ante una entrada acotada, será siempre creciente y por tanto se dice que el sistema es inestable, en tanto que, si todos los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo su respuesta tenderá a un valor constante, por lo que se podrá concluir que es estable.

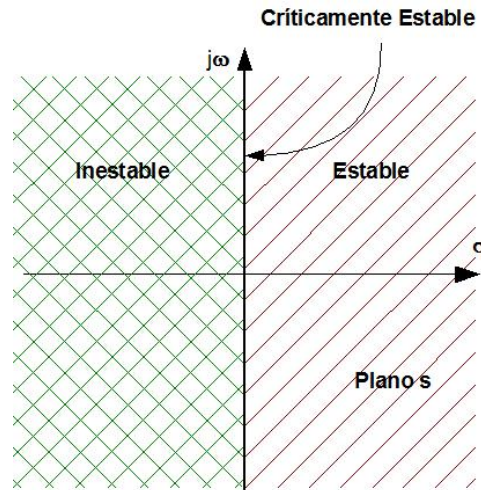


Figura 1.34: Estabilidad en el Plano  $s$

En el caso de que un sistema tenga algún polo ubicado sobre el eje imaginario se considerará críticamente estable pues su salida presentará una oscilación continua pero acotada. Adicionalmente, existen algunos aspectos relacionados con la estabilidad de un sistema que son importantes resaltar y que se enumeran a continuación.

- La estabilidad es una propiedad del sistema en sí y no depende de la entrada o función excitadora del sistema.
- La ubicación de los ceros no tiene efecto en la estabilidad del sistema sino que sólo afecta su respuesta dinámica.
- Un sistema a lazo abierto inestable puede o no generar un sistema a lazo cerrado estable, lo cual es debido a que los polos de lazo abierto son diferentes a los de lazo cerrado.

A continuación se presenta un criterio matemático que fue desarrollado para determinar si un polinomio tiene o no soluciones con parte real positiva y cuyo uso permite realizar un estudio de la estabilidad de los sistemas.

### 1.7.1. Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

La función de transferencia de un sistema puede ser representada tal como se muestra en la Ec. 1.61, donde los coeficientes  $m$  y  $n$  coinciden con el número de ceros y el número de polos, respectivamente.

$$G(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + b_2s^{m-2} + \dots + b_m}{a_0s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + a_n} \quad (1.61)$$

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz permite determinar la cantidad de polos que se encuentran en el semiplano derecho del Plano  $s$  sin necesidad de resolver la ecuación característica correspondiente. Para ello se debe seguir paso a paso el procedimiento que se describe a continuación.

- Verificar que todos los coeficientes de la ecuación característica existan y tengan el mismo signo. Esta condición debe cumplirse pero no es suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.
- A partir de los coeficientes de la ecuación característica se debe completar un arreglo conocido como la Tabla de Routh-Hurwitz, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{cccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 s^0 & g_1 & & & 
 \end{array}$$

donde,

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad \dots$$

Al completar toda la tabla, el criterio enuncia que “El número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo”

Es por ello que, para que todas las raíces de la ecuación característica se encuentren en el semiplano izquierdo del Plano  $s$ , todos los coeficientes de la ecuación característica y todos los términos de la primera columna del arreglo deben ser mayores que cero. Es importante resaltar que no es necesario conocer los valores exactos de los términos de la primera columna sino que solamente se requiere conocer el signo de los mismos.

A continuación se muestran varios ejemplos en los cuales se utiliza el criterio para determinar la estabilidad absoluta de varios sistemas.

**Ejemplo 1.10** Verifique la estabilidad de los sistemas cuyas ecuaciones características se enumeran a continuación.

- a)  $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$
- b)  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$
- c)  $s^5 + 21s^4 + 163s^3 + 579s^2 + 916s + 480 = 0$

**Solución**

a)  $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$

La primera condición del criterio que establece que, todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, no se cumple, por lo que es suficiente para concluir que el sistema es inestable.

b)  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

La primera condición del criterio que establece que, todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, se cumple. Dicha condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad del sistema, por ello se hace necesario completar la Tabla de Routh-Hurwitz y verificar los cambios de signo en la primera columna, tal como se muestra.

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 1 & 11 \\
 s^2 & 6 & 6 \\
 s^1 & b_1 & b_2 \\
 s^0 & c_1 & 
 \end{array}$$

donde,



$$b_1 = \frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot 6}{6} = 10 \quad b_2 = \frac{6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{6} = 0 \quad c_1 = \frac{10 \cdot 6 - 6 \cdot 0}{10}$$

No hay cambio de signo, lo que implica que no hay raíces en el semiplano derecho, por lo tanto el sistema es estable.

$$c) s^5 + 21s^4 + 163s^3 + 579s^2 + 916s + 480 = 0$$

La primera condición del criterio que establece que, todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, se cumple. Dicha condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad del sistema, por ello se hace necesario completar la Tabla de Routh-Hurwitz y verificar los cambios de signo en la primera columna, tal como se muestra.

$s^5$	1	163	916
$s^4$	21	579	480
$s^3$	135,43	893,14	0
$s^2$	440,51	480	
$s^1$	745,57	0	
$s^0$	480		

No hay cambio de signo, lo que implica que no hay raíces en el semiplano derecho, por lo tanto el sistema es estable.

#### 1.7.1.1. Casos Especiales

Existen casos especiales en los cuales deben aplicarse diferentes métodos para lograr completar la tabla requerida y poder concluir respecto a la estabilidad del sistema, los cuales se describen a continuación.

Para el caso en que una fila presenta el primer término igual a cero y todavía hay términos restantes que calcular para completar la tabla, dicho término debe sustituirse por un número positivo muy pequeño, hacerlo tender a cero y evaluar el resto del arreglo. Si al completar el cálculo de la tabla, no hay cambio de signo en la primera columna, se deduce que el sistema es estable.

**Ejemplo 1.11** Verifique la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica se muestra a continuación.

$$s^4 + 2s^3 + 1s^2 + 2s + 0,5 = 0$$

La primera condición del criterio que establece que, todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, se cumple. Dicha condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad del sistema, por ello se hace necesario completar la tabla de Routh-Hurwitz y verificar los cambios de signo en la primera columna, tal como se muestra.

$s^4$	1	1	0,5
$s^3$	2	2	0
$s^2$	0	0,5	
$s^1$			
$s^0$			

Como puede observarse existe un término de la primera columna igual a cero el cual deberá ser sustituido por un valor  $\epsilon$  que se hará tender a cero posteriormente, tal como se muestra a continuación.

$s^4$	1	1	0,5
$s^3$	2	2	0
$s^2$	$\epsilon$	0,5	
$s^1$	$c_1$	0	
$s^0$	0,5		

$$c_1 = \frac{\varepsilon * 2 - 2 * 0,5}{\varepsilon} \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_1 \rightarrow \text{valor negativo}$$

Se concluye que este sistema será inestable pues existirán dos cambios de signo en la primera columna de la tabla.

Existe un segundo caso especial que ocurre cuando todos los coeficientes de una fila son iguales a cero y todavía restan términos para completar el cálculo de la tabla. En ese caso se forma un polinomio auxiliar,  $P(s)$ , con los coeficientes de la fila que está justo arriba de la fila de ceros, el cual que debe derivarse con respecto a  $s$  y colocar los coeficientes del polinomio resultante en la fila de ceros, para finalmente seguir con el cálculo del resto de los coeficientes.

**Ejemplo 1.12** Verifique la estabilidad del sistema cuya ecuación característica se muestra a continuación.

$$s^5 + 2s^4 + s^3 + 2s^2 + 0,5s + 1 = 0$$

La primera condición del criterio que establece que, todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, se cumple. Dicha condición es necesaria pero no suficiente para garantizar la estabilidad del sistema, por ello se hace necesario completar la Tabla de Routh-Hurwitz y verificar los cambios de signo en la primera columna, tal como se muestra.

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 1 & 0,5 \\ s^4 & 2 & 2 & 1 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

para completar la tabla se debe hacer uso del polinomio auxiliar  $P(s)$  y derivarlo respecto a  $s$  para finalmente sustituirlo en la fila de ceros.

$$P(s) = 2s^4 + 2s^2 + 1 \Rightarrow \frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 4s$$

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 1 & 0,5 \\ s^4 & 2 & 2 & 1 \\ s^3 & 8 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & 0 \\ s^1 & -4 & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Se observan dos cambios de signo en la primera columna, por lo que puede concluirse que el sistema presenta dos polos con parte real positiva por lo que el sistema es inestable.

Tal como pudo observarse la aplicación del Criterio de Routh-Hurwitz permite determinar la estabilidad de un sistema a partir de la ecuación característica del mismo sin que se requiera obtener las raíces de la misma. Así mismo, es posible utilizar el criterio para determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica dependa de algún parámetro, tal como se mostrará en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.13** Haga el estudio de la estabilidad del esquema de control que se muestra a continuación en la Fig 1.35, para variaciones en el parámetro  $K$ . Especifique como será la estabilidad del sistema tanto a lazo abierto como cerrado.

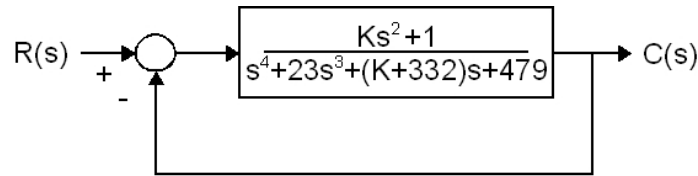


Figura 1.35: Esquema de Control

### Solución

Ecuación Característica a Lazo Abierto (E.C.L.A)

$$s^4 + 23s^3 + (K + 332)s + 479 = 0$$

La primera condición del criterio que establece que todos los coeficientes de la ecuación característica deben existir y tener el mismo signo, no se cumple, por lo que es suficiente para concluir que el sistema a lazo abierto es inestable.

Ecuación Característica a Lazo Cerrado (E.C.L.C)

$$s^4 + 23s^3 + Ks^2 + (K + 332)s + 480 = 0$$

$$K > 0 \quad y \quad K > -332$$

La primera condición del criterio se cumple, si se cumplen las restricciones antes mencionadas, por lo que se hace necesario completar la Tabla de Routh-Hurwitz y garantizar que no existan cambios de signo en la primera columna.

$s^4$	1	$K$	480
$s^3$	23	$K + 332$	0
$s^2$	$b_1$	480	0
$s^1$	$c_1$	0	
$s^0$	480		

donde,

$$b_1 = \frac{23K - (K + 332)}{23} > 0 \Rightarrow b_1 = \frac{22K - 332}{23} > 0 \Rightarrow K > \frac{332}{22} \Rightarrow K > 15,09$$

$$c_1 = \frac{(22K - 332)(K + 332) - 23^2(480)}{23b_1} \Rightarrow 22K^2 + 6972K - 364144 > 0 \Rightarrow K > 45,65$$

ó  $K < -362,56$

Analizando cada una de las restricciones para  $K$  se concluye que el sistema a lazo cerrado será estable cuando  $K \geq 45,65$

## 1.8. Resolución a partir de la Representación de Estado

Para un sistema definido a través de su representación de estado como lo muestran las Ecs. 1.62 y 1.63, es posible obtener una matriz de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  que contenga todas las funciones de transferencia del sistema, tal como se indica a continuación.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.62)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.63)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones de estado antes mencionadas, se obtiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.64)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.65)$$

Partiendo de la definición de función de transferencia, para la cual se considera que todas las variables tienen condiciones iniciales nulas, entonces  $\mathbf{x}(0) = 0$ , por lo que la Ec. 1.64 puede reescribirse como sigue,

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.66)$$

y finalmente se puede obtener una relación entre  $\mathbf{Y}(s)$  y  $\mathbf{U}(s)$  sustituyendo la Ec. 1.66 en la Ec. 1.65.

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s)$$

A partir de allí se obtiene la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(s)$ , tal como lo muestra la Ec. 1.67, en la cual figuran las funciones de transferencia entre todas las salidas y todas las entradas.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.67)$$

**Ejemplo 1.14** Para un proceso cuyo modelo se encuentra representado por las Ecs. 1.68 y 1.69, se desea obtener la matriz de transferencia del mismo, de forma tal que se disponga de todas las funciones de transferencia del proceso.

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 - x_1 - 3x_2 \quad (1.68)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_1 - 2x_2 - u_2 \quad (1.69)$$

### Solución

A partir de las ecuaciones del proceso se obtiene la representación de estado y de allí la matriz de transferencia  $\mathbf{G}(s)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \left( \frac{1}{s^2+3s+2} \right) \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz de transferencia se tienen todas las funciones de transferencia del proceso, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2+3s+2} & \frac{4}{s^2+3s+2} \\ \frac{s+1}{s^2+3s+2} & \frac{-(s+1)}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$Y_1(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}U_1(s) + \frac{4}{s^2+3s+2}U_2(s) \quad (1.70)$$

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2}U_1(s) - \frac{(s+1)}{s^2+3s+2}U_2(s) \quad (1.71)$$

Las Ecs. 1.70 y 1.71 representan las relaciones de transferencia de cada una de las salidas, las cuales contienen las funciones de transferencia antes mencionadas.

## 1.9. Sensibilidad

La sensibilidad de un sistema de control se define como la relación del cambio porcentual en la función de transferencia del sistema respecto al cambio porcentual en alguna función de transferencia o parámetro del mismo, para un cambio incremental pequeño.

Partiendo del diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 1.36, la función de transferencia del sistema de control corresponde con la función de transferencia del lazo cerrado, pudiéndose analizar la sensibilidad del sistema de control respecto a  $G(s)$ ,  $H(s)$  o algún parámetro específico de dichas funciones de transferencia.

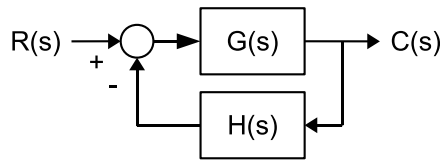


Figura 1.36: Sistema de control

Siendo  $T(s)$  la función de transferencia a lazo cerrado que se muestra en la Ec. 1.72,  $S_G^T$  se define como la sensibilidad del sistema de control respecto a  $G(s)$  según la Ec. 1.73.

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.72)$$

$$S_G^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln T(s)}{\partial \ln G(s)} \quad (1.73)$$

$$S_G^T = \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \left( \frac{G(s)}{T(s)} \right) \Rightarrow S_G^T = \frac{(1 + G(s)H(s)) - (G(s)H(s))}{(1 + G(s)H(s))^2} \left( \frac{G(s)}{G(s)/1 + G(s)H(s)} \right)$$

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.74)$$

A partir de la Ec. 1.74, que define  $S_G^T$ , es posible concluir que si  $G(s)H(s) \gg 1$  entonces la sensibilidad del sistema de control respecto a  $G(s)$  tiende a cero. Esto quiere decir que una variación en la función de transferencia del proceso  $G(s)$  tendrá poco efecto sobre la respuesta del sistema de control. Cabe destacar que si  $G(s)H(s) \gg 1$  podría hacer que la respuesta del sistema sea altamente oscilatoria o inclusive inestable.

Por otro lado, es posible determinar  $S_H^T$ , que se define como la sensibilidad del sistema de control respecto a  $H(s)$ , tal como se muestra a continuación.

$$S_H^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta H(s)/H(s)} = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial H(s)/H(s)}$$

$$S_H^T = - \left( \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right)^2 \left( \frac{H(s)}{G(s)/1 + G(s)H(s)} \right)$$

$$S_H^T = - \left( \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \right) \quad (1.75)$$

En este caso, si  $G(s)H(s) \gg 1$  la sensibilidad del sistema tenderá a uno, por lo que será altamente sensible a cambios en  $H(s)$ .

Finalmente, el cálculo de la sensibilidad del sistema respecto a un parámetro  $\alpha$  de la función de transferencia también puede realizarse utilizando la Ec. 1.76.

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T(s, \alpha)}{\partial \alpha} \left( \frac{\alpha}{T(s, \alpha)} \right) \quad (1.76)$$

**Ejemplo 1.15** Para un sistema que tiene una función a lazo abierto como la que muestra en la Ec. 1.77, se desea conocer la sensibilidad a lazo abierto respecto a la ganancia  $K_1$ . Así mismo, se desea conocer la sensibilidad a lazo cerrado si se tiene un sistema de control como el que se muestra en la Fig. xx.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = -K_1 \quad (1.77)$$

**Solución**

Para el lazo abierto la sensibilidad se calcula según la Ec. 1.78, en tanto que para el lazo cerrado se debe obtener la función de transferencia a lazo cerrado y luego utilizar la Ec. 1.76, para que finalmente se obtenga dicha sensibilidad según muestra la Ec 1.79.

$$S_{K_1}^{T_{LA}} = -1 \left( \frac{K_1}{-K_1} \right) = 1 \quad (1.78)$$

Función de transferencia a lazo cerrado

$$T_{LC}(s) = \frac{-K_1}{1 + K_1 K_2}$$

$$S_{K_1}^{T_{LC}} = \left[ \frac{(-1)(1 + K_1 K_2) - K_2 K_1}{(1 + K_1 K_2)^2} \right] \left[ \frac{K_1}{\left( \frac{-K_1}{1 + K_1 K_2} \right)} \right]$$

$$S_{K_1}^{T_{LC}} = \frac{1}{1 + K_1 K_2} \quad (1.79)$$

Como se puede observar la sensibilidad a lazo abierto aumenta a medida que aumenta el parámetro  $K_1$ , en tanto que a lazo cerrado ocurre lo contrario. Adicionalmente, el lazo cerrado tiene una sensibilidad mucho menor que el lazo abierto respecto a la variación del parámetro en cuestión. Por ejemplo si se tiene que  $K_1 = 1000$  y  $K_2 = 0,1$  la sensibilidad del lazo abierto es cien veces mayor que la del lazo cerrado.

$$S_{K_1}^{T_{LA}} = 1 \quad S_{K_1}^{T_{LC}} = \frac{1}{1+100} \approx 0,01$$

**Ejemplo 1.16** Para un proceso cuya función de transferencia a lazo abierto está definida por la Ec. 1.70, calcule la sensibilidad del sistema respecto al parámetro  $K$ , tanto a lazo abierto como a lazo cerrado considerando retroalimentación unitaria.

$$T_{LA}(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + 6} \quad (1.80)$$

**Solución**

Sensibilidad a lazo abierto

$$S_K^{T_{LA}} = \frac{\partial T_{LA}(s)}{\partial K} \left( \frac{K}{T_{LA}(s)} \right)$$

$$S_K^{T_{LA}} = \left[ \frac{(1)(s^2 + 5s + 6)}{(s^2 + 5s + 6)^2} \right] \left[ \frac{K}{\frac{K}{s^2 + 5s + 6}} \right] = 1$$

Para calcular la sensibilidad a lazo cerrado primero se debe conocer la función de transferencia a lazo cerrado, tal como se muestra.

$$T_{LC}(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + 6 + K}$$

$$S_K^{T_{LC}} = \frac{\partial T_{LC}(s)}{\partial K} \left( \frac{K}{T_{LC}(s)} \right)$$

$$S_K^{T_{LC}} = \left[ \frac{(1)(s^2 + 5s + 6 + K) - (1)K}{(s^2 + 5s + 6 + K)^2} \right] \left[ \frac{\frac{K}{s^2 + 5s + 6 + K}}{\frac{K}{s^2 + 5s + 6 + K}} \right] = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 6 + K}$$

## 1.10. Problemas resueltos

**Problema resuelto 1.1** Un sistema de control de presión de una planta de fabricación de vasos funciona según el esquema de control que se muestra en la Fig. 1.37, donde el proceso en sí se muestra enmarcado dentro de un cuadro punteado. El cálculo de las ganancias asociadas al proceso ( $K$  y  $K_v$ ) resulta complicado, por lo que se decide hacer una identificación al proceso. Para ello se realiza la siguiente experiencia, estando estable el valor de  $E$  en 12 psi, se introduce un escalón de 2 psi en dicha variable, obteniéndose la respuesta mostrada en la Fig. 1.38. A partir de dicha información se requiere lo siguiente:

- Identifique los valores de  $K$  y  $K_v$
- Calcule el tiempo de establecimiento (2%) del sistema completo para un  $T_c = 1$ .
- Indique la relación entre el  $t_s$  y  $T_c$ . Razone su respuesta.

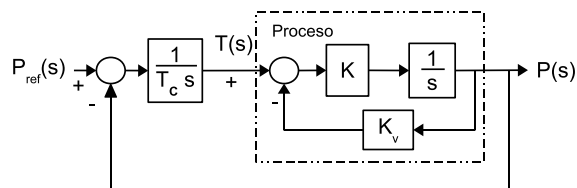
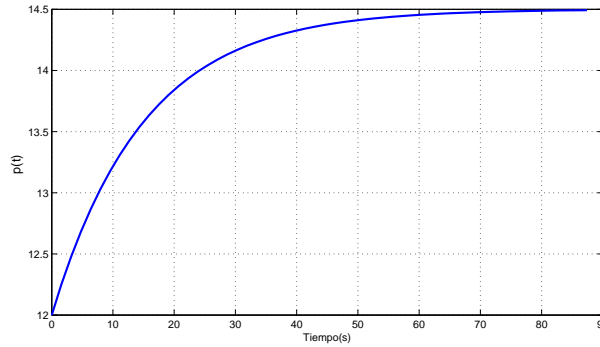


Figura 1.37: Sistema de control de la planta



Figura 1.38: Respuesta de  $p(t)$  ante una variación en  $e(t)$ **Solución**

a) Para identificar la función de transferencia del proceso se debe obtener la misma en función de  $K$  y  $K_v$  e igualarla a la función identificada a partir del gráfico de la respuesta dado, tal como sigue.

$$G_{proceso}(s) = \frac{K}{s + KK_v}$$

$$K_{proceso} = 1/K_v \quad \tau_{proceso} = 1/KK_v$$

A partir de la Fig. 1.38 se obtienen los valores numéricos para la ganancia y la constante de tiempo del proceso y de allí los valores de los parámetros requeridos.

$$K_{proceso} = \frac{(14,5-12)}{2} \Rightarrow K_{proceso} = 1,25 \Rightarrow K_v = 0,8$$

$$p(\tau_{proceso}) = 0,632(2,5) = 1,58 \Rightarrow \tau_{proceso} \approx 15 \Rightarrow K = 0,0833$$

b) Para calcular el tiempo de establecimiento del sistema completo se requiere la función de transferencia del mismo.

$$G(s) = \frac{1,25}{T_C s (15s + 1) + 1,25} = \frac{1,25}{15T_C s^2 + T_C s + 1,25} \Rightarrow G(s) = \frac{\frac{0,083}{T_C}}{s^2 + 0,067s + \frac{0,083}{T_C}}$$

Para  $T_C = 1$

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= 0,067 & \zeta &= 0,12 \\ \omega_n^2 &= 0,083 & \omega_n &= 0,29 \end{aligned} \Rightarrow t_{s(2\%)} = 119,4$$

c) Para verificar la influencia de  $T_C$  sobre el tiempo de establecimiento se debe conocer la influencia que tiene sobre los polos del sistema, pues los mismos pueden ser reales a imaginarios, lo que haría una diferencia importante sobre la respuesta.

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= 0,067 \\ \omega_n^2 &= \frac{0,083}{T_C} \end{aligned} \Rightarrow \zeta = \frac{0,033}{T_C}$$

Se puede concluir que para un  $T_C \geq 0,033$  el valor de  $\zeta$  será mayor o igual a uno, por lo que el tiempo de establecimiento del sistema se puede calcular a partir del producto de  $\zeta \omega_n$ , el cual no depende del valor de  $T_C$  por lo que el tiempo de establecimiento no variará con dicho parámetro. Para el caso en que  $T_C < 0,033$  los polos del sistema serán reales, por lo que la respuesta del sistema estará dominada por el polo que se encuentre más cerca del eje imaginario. A medida que  $T_C$  vaya disminuyendo el factor de amortiguación será cada vez mayor, por lo que uno de sus polos se acercará cada vez más al eje imaginario haciendo al sistema cada vez más lento, por lo que se puede concluir que el tiempo de establecimiento es cada vez mayor.

**Problema resuelto 1.2** En la Fig. 1.41 se muestra un esquema que representa el diagrama de bloques de un sistema de control de temperatura en donde  $R(s)$  representa la referencia,  $C(s)$  la variable a controlar,  $P(s)$  una perturbación al sistema y la ganancia  $K_1$  un controlador opcional a añadir. A partir de allí se desea conocer lo siguiente.

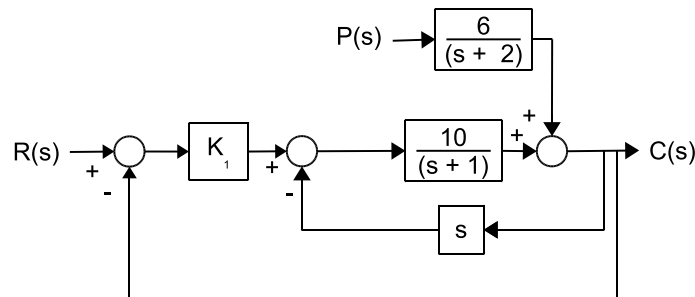


Figura 1.39: Diagrama de Bloques. Control de Temperatura

- a) Si se solicita que el error ante una variación escalón unitario en la referencia sea menor o igual a 0,1, ¿Diga si es necesario introducir la ganancia  $K_1$ ? De ser afirmativa su respuesta, qué valor debería tener  $K_1$  para satisfacer dicha restricción en el error.
- b) ¿Presentaría alguna modificación en el valor del error si simultáneamente al escalón unitario en  $R(s)$  se introdujera un escalón de magnitud 2 en la perturbación  $P(s)$ ? De ser afirmativa su respuesta calcule el nuevo valor del error ante dichas entradas para el  $K_1$  calculado previamente.
- c) Finalmente se desea conocer el valor de la ganancia  $K_1$  tal que el error total cumpla con la restricción inicial de ser menor o igual a 0,1. Considere que se mantienen las mismas variaciones, tanto de la referencia como de la perturbación, señaladas en a) y b).

**Solución**

a) Para calcular el error a la referencia se necesita conocer la función de transferencia a lazo abierto, la cual queda expresada por la Ec. 1.81. A partir de allí se puede concluir que el error a la referencia es finito ante el escalón, pues la función de transferencia a lazo abierto es de tipo 0 y su valor será el expresado por la Ec. 1.82. Como puede observarse dicho error depende de  $K_1$ , por lo que se puede obtener el valor de la ganancia para satisfacer la condición establecida.

$$G_{LA}(s) = \frac{10K_1}{11s + 1} \tag{1.81}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + 10K_1} \tag{1.82}$$

$$\frac{1}{1 + 10K_1} \leq 0,1 \Rightarrow 1 + 10K_1 \geq 10 \Rightarrow K_1 \geq 0,9$$

**b)** Para calcular el error a la perturbación se debe conocer la función de transferencia entre  $C(s)$  y  $P(s)$ , la cual se puede obtener a partir de la reducción del diagrama de bloques del proceso tal como se muestra en las Figs. (a) y (b).

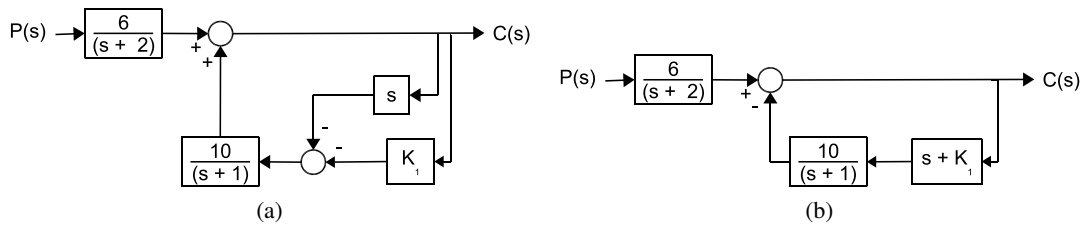


Figura 1.40: Reducción del diagrama

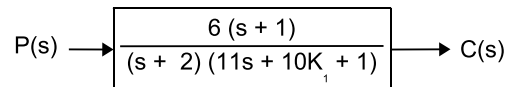


Figura 1.41: Función de transferencia entre  $C(s)$  y  $P(s)$

$$e_{ssp} = -\lim_{s \rightarrow 0} s C_P(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \left( \frac{2}{s} \right) \left( \frac{6(s+1)}{(s+2)(11s+10K_1+1)} \right) \right] = -\frac{2(6)}{2(10K_1+1)} = -\frac{6}{(10(0,9)+1)} = -0,6$$

Conocidos ambos errores, el error completo del proceso se calcula como la suma de ambos con sus respectivos signos, obteniéndose un error igual a  $-0,5$ , lo que quiere decir que la respuesta quedará por arriba del valor del escalón.

**c)** El valor de la ganancia  $K_1$  tal que el error total que cumpla con la restricción inicial se calcula tal como se muestra a continuación.

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssp} = \frac{1}{(1+10K_1)} - \frac{6}{(10K_1+1)} = -\frac{5}{(1+10K_1)}$$

$$\frac{5}{(1+10K_1)} \leq 0,1 \Rightarrow K_1 \geq 4,9$$

**Problema resuelto 1.3** En la Fig. 1.42(a) se muestra el esquema de un reactor en el cual se desea implementar un sistema de control, de retroalimentación simple, para controlar la concentración del producto manipulando el flujo de entrada al reactor. Para conocer la función de transferencia del reactor,  $Gp(s)$ , entre la variable controlada y la manipulada, se provocó una perturbación escalón unitario en el flujo de entrada, previo a la implementación de un sistema de control de retroalimentación simple, obteniéndose la variación en la concentración del producto que se muestra en la Fig. 1.42(b). Se conoce además que, una vez implementado el sistema de control, el error en estado estacionario ante una perturbación escalón unitario en la concentración de referencia fue de  $0,1$ .

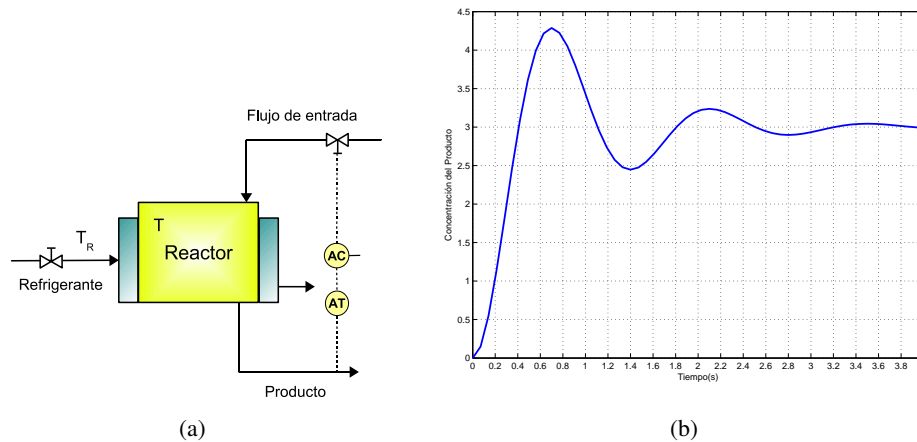


Figura 1.42: Esquema del reactor y respuesta temporal

En el sistema de control planteado las funciones de transferencia de la válvula ( $G_v(s)$ ) y del medidor ( $G_m(s)$ ) son unitarias y la función de transferencia del controlador es una ganancia  $Kc$ . Basándose en dichas informaciones se desea conocer lo siguiente:

- a) El tipo de la función de transferencia a lazo abierto
- b) Función de transferencia del proceso  $Gp(s)$
- c) El Valor de la ganancia del controlador  $Kc$

**Solución**

a) Tal como se mencionó en el enunciado del problema, el error a lazo abierto es finito, por lo cual el sistema a lazo abierto debe ser de tipo 0.

b) Dada la forma de la respuesta la función de transferencia solicitada se puede aproximar a un proceso de segundo orden subamortiguado, cuya expresión general se mostró en la Ec. 1.25. Para ello se debe utilizar información proveniente de Fig. 1.42(b), se leerá el valor del establecimiento,  $c(\infty)$ , el máximo valor que alcanza la salida,  $c(tp)$ , y el tiempo al que ocurre,  $tp$ .

$$c(\infty) = K_{LA}M \Rightarrow 3 = K_{LA}(1) \Rightarrow K_{LA} = 3$$

$$Mp = \frac{4,3 - 3}{3} = 0,43 \Rightarrow \zeta = 0,259$$

$$tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow 0,7 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - (0,259)^2}} \Rightarrow \omega_n = 4,6465$$

$$Gp(s) = \frac{3(4,6465)^2}{s^2 + 2(0,259)(4,6465)s + (4,6465)^2} = \frac{64,77}{s^2 + 2,4s + 21,59}$$

c) El valor de la ganancia del controlador se calcula a partir de la información del error

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} (KcGp(s))} \Rightarrow 0,1 = \frac{1}{1 + 3Kc} \Rightarrow Kc = 3$$

**Problema resuelto 1.4** En la Fig. 1.43(a) se muestra un tanque de mezclado para el cual se desea controlar la concentración a la salida  $C_a$  manipulando el flujo de entarda  $F$ , para ello se dispone del diagrama de bloques

del esquema de control planteado, en el cual  $K_c$  y  $K_v$  corresponden con las ganancias del controlador y de la válvula, respectivamente.

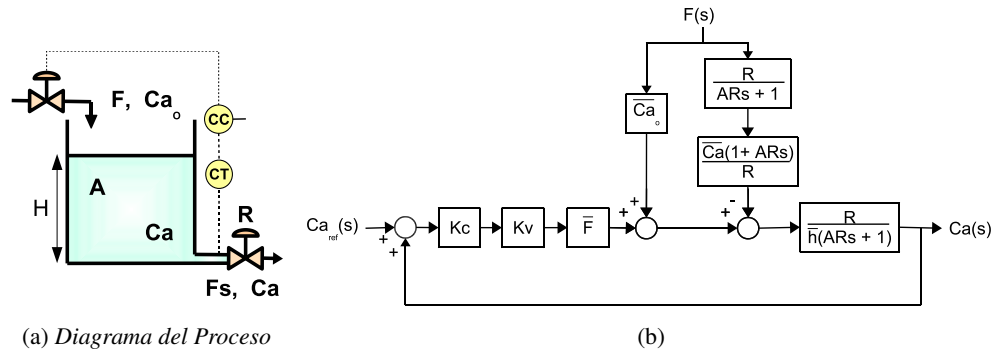


Figura 1.43: Esquema del Tanque y diagrama de bloques del esquema de control

A partir de dicha información se desea estudiar la respuesta transitoria y permanente de dicho sistema respondiendo a las siguientes preguntas:

- a) Constante de tiempo, tanto a lazo abierto como a lazo cerrado
- b) Efecto que tienen el valor del área del tanque y el valor de la ganancia del controlador sobre la rapidez de la respuesta tanto a lazo abierto como a lazo cerrado.
- c) Encuentre la expresión de  $Ca(s)$  en función de  $Ca_{ref}(s)$  y de  $F(s)$
- d) Encuentre la expresión del error de  $Ca(s)$  considerando que dos entradas del sistemas son escalón unitario.

**Solución**

a) Para conocer la constante de tiempo de un sistema se debe conocer su función de transferencia, por lo que se muestran en las Ecs. 1.83 y 1.84 las funciones de transferencia del proceso bajo estudio, tanto a lazo abierto como a lazo cerrado.

$$G_{LA}(s) = \frac{K_c K_v \bar{F} R}{h (ARs + 1)} = \frac{\left( \frac{K_c K_v \bar{F} R}{h} \right)}{ARs + 1} \Rightarrow \tau_{LA} = AR \tag{1.83}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{K_c K_v \bar{F} R}{h + K_c K_v \bar{F} R}}{\left( \frac{ARh}{h + K_c K_v \bar{F} R} \right) s + 1} \Rightarrow \tau_{LC} = \frac{ARh}{h + K_c K_v \bar{F} R} \tag{1.84}$$

b) Tanto a lazo abierto como a lazo cerrado a medida que aumenta el área del tanque aumenta la constante de tiempo, por lo que se reduce la rapidez de la respuesta. En cuánto al efecto que tiene la ganancia del controlador se puede decir que, a lazo abierto no tiene ninguna influencia pero a lazo cerrado, a medida que aumenta dicha ganancia disminuye la constante de tiempo por lo que aumenta la rapidez de la respuesta.

c) Dicha expresión corresponde con la relación de transferencia de  $Ca(s)$ , la cual se obtiene a partir de las funciones de transferencia entre la salida y cada una de las entradas, tal como se muestra.

$$Ca(s) = \left[ \frac{\frac{K_c K_v \bar{F} R}{h + K_c K_v \bar{F} R}}{\left( \frac{ARh}{h + K_c K_v \bar{F} R} \right) s + 1} \right] Ca_{ref}(s) + \left[ \frac{(\bar{Ca}_o - \bar{Ca}) R}{hARs + h + RK_c K_v \bar{F}} \right] F(s)$$

d) El error completo se calcula como la contribución debida a la referencia y a la perturbación, tal como se muestra. De allí que se demuestra que el error es finito e inversamente proporcional a la ganancia del controlador.

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssP}$$

$$e_{ssR} = \frac{1}{1 + \left(\frac{KcKv\bar{F}R}{\bar{h}}\right)} = \frac{\bar{h}}{\bar{h} + KcKv\bar{F}R}$$

$$e_{ssP} = -\lim_{s \rightarrow 0} sC_P(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \left(\frac{1}{s}\right) \left( \frac{(\bar{C}a_o - \bar{C}a)R}{\bar{h}ARs + \bar{h} + RKcKv\bar{F}} \right) \right] = -\frac{(\bar{C}a_o - \bar{C}a)R}{\bar{h} + RKcKv\bar{F}}$$

$$e_{ss} = \frac{\bar{h}}{\bar{h} + KcKv\bar{F}R} - \frac{(\bar{C}a_o - \bar{C}a)R}{\bar{h} + RKcKv\bar{F}}$$

**Problema resuelto 1.5** Para un sistema electromecánico lineal, para el cual se desea estudiar la variación de  $e_0(t)$  ante variaciones de  $e_i(t)$ , se muestran a continuación las Ecs. 1.85, 1.86 y 1.87 que lo representan matemáticamente, así como la función de transferencia entre  $E_o(s)$  y  $E_i(s)$ . De antemano se sabe que el sistema puede oscilar dependiendo de los valores que se seleccionen para los parámetros  $R_1, L_1, R_2, L_2$  y  $C$ .

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = e_i(t) - R_1 i_1(t) - i_0(t) \quad (1.85)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = e_0(t) - R_2 i_2(t) \quad (1.86)$$

$$C \frac{de_0(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \quad (1.87)$$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{L_2 s + R_2}{CL_1 L_2 s^3 + (CR_2 L_1 + CR_1 L_2) s^2 + (L_1 + L_2 + CR_1 R_2) s + (R_1 + R_2)}$$

Para nuestra investigación sólo se variará el valor de  $C$ , en tanto que los para los otros parámetros se fijarán los siguientes valores,  $L_1 = L_2 = 1, R_1 = 1, R_2 = 8$ . Los valores escogidos para  $C$  fueron:  $C = 1$  y  $C = 20$ , para los cuales usted deberá, razonadamente, analizar la respuesta ante un escalón unitario respondiendo las siguientes preguntas.

**a)** Indique, para las dos posibles juegos de parámetros, que forma tendrá la respuesta ante una entrada escalón unitario, para lo que se solicita que realice un esbozo de la misma, detallando algunos valores en dicha respuesta, justificando en cada caso la aproximación a la cual haya tenido que recurrir.

**b)** Ahora considere que se podría plantear un esquema de control de retroalimentación unitaria, donde el lazo abierto fuese la función antes mencionada, verifique la influencia que tiene el parámetro  $C$  sobre la estabilidad del sistema tanto a lazo abierto como a lazo cerrado.

**Solución**

**a)** Para realizar el análisis requerido es necesario obtener la función de transferencia numérica para cada uno de los casos propuestos, para lo cual se obtiene la función de transferencia como una función de  $C$  únicamente.

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{s + 8}{Cs^3 + 9Cs^2 + (2 + 8C)s + 9}$$

Para cada valor de  $C$  se muestra en la Tabla 1.3 la función de transferencia en cada caso, así como las raíces de la ecuación característica. Así mismo, considerando que los polos dominantes son los que se encuentran más cerca del eje imaginario, se señala en dicha tabla cuales serían dichos polos dominantes.

$C$	Función de transferencia	Polos del proceso	Polos dominantes
1	$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{s+8}{s^3+9s^2+10s+9}$	$s_1 = -7,86$ $s_2 = -0,56 + 0,91j$ $s_3 = -0,56 - 0,91j$	$s_2 = -0,56 + 0,91j$ $s_3 = -0,56 - 0,91j$
20	$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{s+8}{20s^3+180s^2+162s+9}$	$s_1 = -7,99$ $s_2 = -0,95$ $s_3 = -0,06$	$s_3 = -0,06$

Cuadro 1.3: Características del proceso según su valor de  $C$ 

Una vez obtenidos los polos dominantes del proceso, en cada caso, se presenta a continuación a la aproximación de la respuesta temporal del sistema tal como se muestra a continuación.

Para  $C = 1$

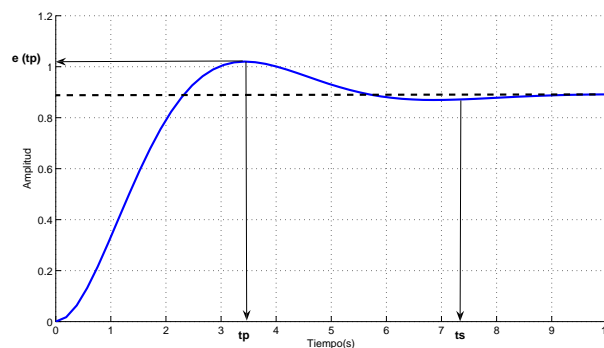
Los polos dominantes del proceso son imaginarios por lo que la respuesta se aproximará a la de un sistema de segundo orden subamortiguado, cuyos parámetros característicos  $\zeta$  y  $\omega_n$  se calculan a partir de dichos polos. A partir de allí se podrán calcular las características de la respuesta transitoria y para la respuesta permanente se debe calcular el valor del establecimiento del proceso utilizando el Teorema del Valor Final.

$$\begin{aligned} \zeta \omega_n = 0,56 & \Rightarrow \zeta = 0,52 & \Rightarrow M_p = 14,46 \\ \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0,91 & \Rightarrow \omega_n = 1,07 & \Rightarrow t_p = 3,45 \\ & & \Rightarrow t_s(2\%) = 7,14 \end{aligned}$$

$$e_0(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{s+8}{s^3+9s^2+10s+9} \right) \Rightarrow e_0(\infty) = \frac{8}{9} = 0,88$$

Conocido el valor final se debe calcular el valor de la salida para el  $t_p$  de forma tal que se completen los datos necesarios para realizar el esbozo de la respuesta (Fig. 1.44).

$$M_p = \frac{e_0(t_p) - e_0(\infty)}{e_0(\infty)} = 0,1446 \Rightarrow e_0(t_p) = 1,02$$

Figura 1.44: Esbozo de la respuesta ( $C = 1$ )

Para  $C = 20$

## 1 Análisis de la Respuesta Temporal

En este caso la respuesta podrá ser aproximada a la de un sistema de primer orden pues el polo dominante es real, a partir del cual se podrá aproximar una constante de tiempo para el proceso, tal como se muestra en la Ec. 1.88. Así mismo, dicha constante de tiempo será utilizada para calcular el tiempo de establecimiento (Ec. ).

$$\tau_{proceso} = \frac{1}{s_3} = \frac{1}{0,06} \Rightarrow \tau_{proceso} = 16,66 \quad (1.88)$$

$$t_s(2\%) = 4\tau_{proceso} = 66,66$$

Al igual que para el primer caso se debe calcular el valor final de la respuesta para finalmente realizar el esbozo de la respuesta que se muestra en la Fig. xx.

$$e_0(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{s+8}{20s^3 + 180s^2 + 162s + 9} \right) \Rightarrow e_0(\infty) = \frac{8}{9} = 0,88$$

$$e_0(\tau) = 0,632(0,88) \Rightarrow e_0(\tau) = 0,56$$

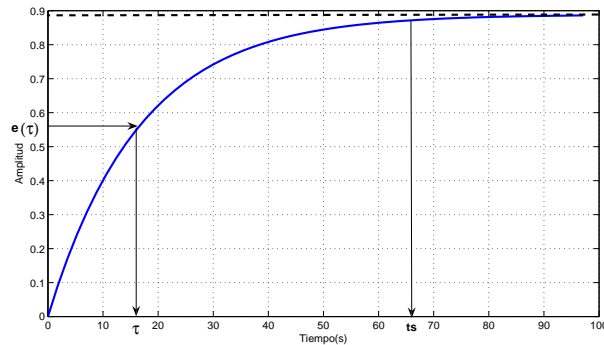


Figura 1.45: Esbozo de la respuesta  $C = 20$

**b)** El estudio de la estabilidad se realiza a partir de la ecuación característica, tanto a lazo abierto como a lazo cerrado.

Ecuación característica a lazo abierto

$$s^3 + 9s^2 + \left( \frac{2+8C}{C} \right) s + \frac{9}{C} = 0$$

La primera condición requerida para garantizar la estabilidad es que existan todos los coeficientes de la ecuación característica y que tengan el mismo signo, para lo cual se deben cumplir las siguientes condiciones.

$$C > 0 \quad ; \quad 2 + 8C > 0 \quad \Rightarrow \quad C > -\frac{1}{4}$$



Ahora se plantea la Tabla de Routh-Hurwitz y se debe garantizar que todos los términos de la primera columna tengan el mismo signo.

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 9 \\ b_1 \\ \frac{9}{C} \end{array} \begin{array}{l} \left(\frac{2+8C}{C}\right) \\ \frac{9}{C} \\ 0 \\ \frac{9}{C} \end{array}$$

$$b_1 = \frac{9\left(\frac{2+8C}{C}\right) - \frac{9}{C}}{9} = \frac{18 + 72C - 9}{9C} > 0 \quad \Rightarrow \quad C > -\frac{1}{8}$$

Analizando todas las restricciones se concluye que para  $C > 0$  el sistema a lazo abierto será estable.

Ecuación característica a lazo cerrado

$$s^3 + 9s^2 + \left(\frac{3+8C}{C}\right)s + \frac{17}{C} = 0$$

La primera condición requerida para garantizar la estabilidad es que existan todos los coeficientes de la ecuación característica y que tengan el mismo signo, para lo cual se deben cumplir las siguientes condiciones.

$$C > 0 \quad ; \quad 3 + 8C > 0 \quad \Rightarrow \quad C > -\frac{3}{8}$$

Ahora se plantea la Tabla de Routh-Hurwitz y se debe garantizar que todos los términos de la primera columna tengan el mismo signo.

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 9 \\ b_1 \\ \frac{17}{C} \end{array} \begin{array}{l} \left(\frac{3+8C}{C}\right) \\ \frac{17}{C} \\ 0 \\ \frac{17}{C} \end{array}$$

$$b_1 = \frac{9\left(\frac{3+8C}{C}\right) - \frac{17}{C}}{9} = \frac{7 + 72C - 17}{9C} > 0 \quad \Rightarrow \quad C > -\frac{10}{72}$$

Analizando todas las restricciones se concluye que para  $C > 0$  el sistema a lazo cerrado será estable.

## 1.11. Problemas Propuestos

**Ejercicio propuesto 1.1** *La respuesta a lazo abierto de un proceso se puede observar en la Fig. 1.46 (a). Si se desea implantar la estrategia de control que se muestra en la Fig. 1.46 (b), calcule el valor de A para que la constante de tiempo a lazo cerrado sea la mitad de la del lazo abierto.*

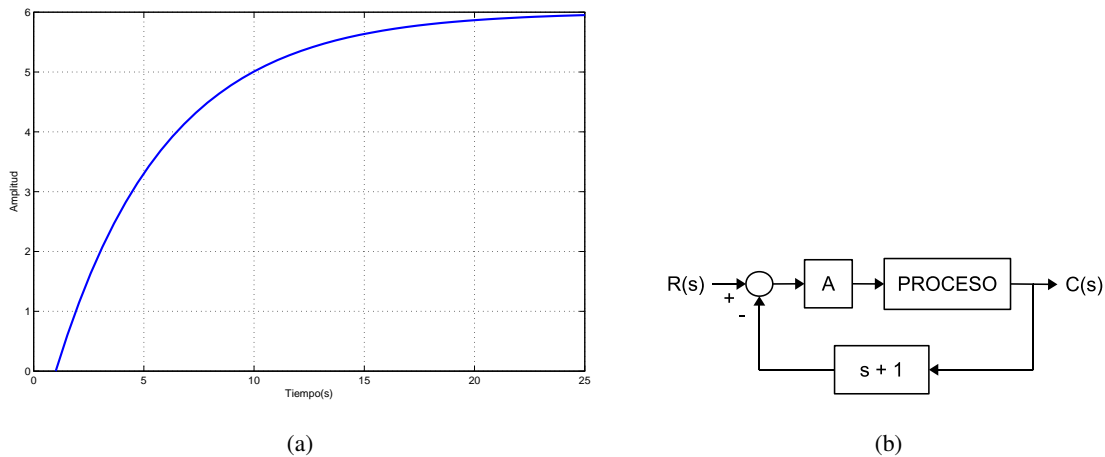


Figura 1.46: Esquema de control y respuesta a lazo abierto

**Ejercicio propuesto 1.2** Dado un sistema caracterizado por la función de transferencia que se muestra en la Ec. 1.89, es excitado por una señal  $r(t) = 2 \quad \forall t$  y la respuesta de su salida se muestra en la Fig. 1.47.

a) Determine, a partir de la gráfica, el máximo pico, tiempo pico, valor de establecimiento y tiempo de establecimiento del sistema a lazo abierto.

b) Utilizando los resultados anteriores, calcule el máximo pico, tiempo pico, valor de establecimiento y tiempo de establecimiento del sistema a lazo cerrado, considerando que se tienen un sistema de retroalimentación unitaria.

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + as + b} \tag{1.89}$$

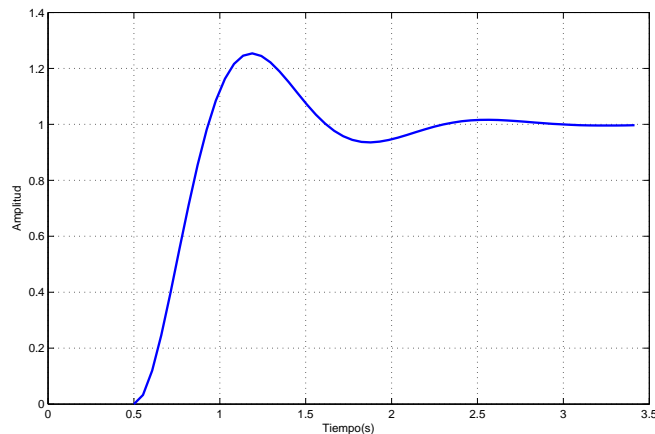


Figura 1.47: Respuesta al escalón

**Ejercicio propuesto 1.3** Un sistema de control de retroalimentación simple diseñado para mantener constante el torque de un eje rotatorio se muestra en la Fig. 1.48. El sensor del torque supervisa la tensión de una sección del eje, la cual es casi proporcional a torque aplicado sobre el eje. Para una entrada escalón unitario en la referencia, escoja las constantes  $K_1$  y  $K_2$  en el controlador, si es posible, para que la respuesta del sistema de control tenga un factor de amortiguación de al menos 0,7 y una frecuencia natural no amortiguada igual a 6 rad/seg.

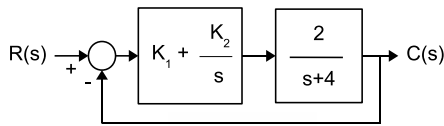


Figura 1.48: Sistema de Control de Torque

**Ejercicio propuesto 1.4** Para el sistema mostrado en la Fig. 1.49, encuentre el valor de la Ganancia  $K$  para la cual la relación de amortiguación del lazo cerrado sea igual a 0,7. Para dicho valor de  $K$ , calcule la frecuencia natural amortiguada del sistema.

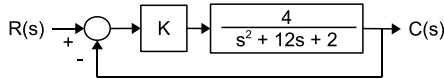


Figura 1.49: Diagrama de bloques

**Ejercicio propuesto 1.5** Para el sistema que se muestra en la Fig. 1.50 se tiene las Ecs. 1.90 y 1.91 que representan el comportamiento de ambos tanques. Se desea que se diseñe el valor del coeficiente  $C_v$  de la segunda válvula tal que, al ser sometido a una perturbación escalón unitario en el caudal de entrada  $U(t)$ , el tiempo de establecimiento para  $H_2(t)$  sea igual al tiempo de establecimiento de  $H_1(t)$ .

Una vez establecido dicho coeficiente implante un esquema de control para  $H_2(t)$  manipulando  $U(t)$  considerando que la función del controlador sea un ganancia  $K$  y que el medidor y el actuador tengan una funciones de transferencia unitarias. Establezca el valor de dicha ganancia tal que el polo dominante a lazo cerrado tenga la mitad del tiempo de establecimiento fijado anteriormente. Finalmente, diga si existe algunos límites para  $K$  de forma que el sistema a lazo cerrado permanezca siempre estable.

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = U(t) - 0,5H_1(t) \quad (1.90)$$

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = 0,5H_1(t) - \frac{H_2(t)}{C_v} \quad (1.91)$$

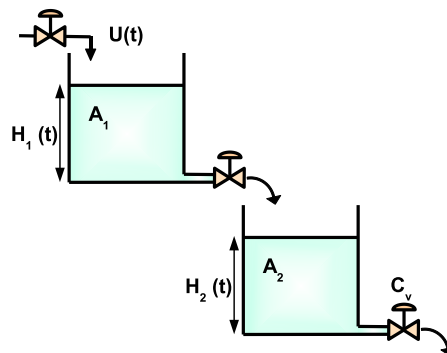


Figura 1.50: Sistema de tanques

**Ejercicio propuesto 1.6** Para diferentes procesos cuyas ecuaciones características son las que se muestran a continuación, Diga para que rangos de  $K$  dichos procesos serán estables.

a)  $s^3 + (2 + K)s^2 + (8 + K)s + 6 = 0$

- b)  $2s^3 + (6 - 2K)s^2 + (4 + 3K)s + 10 = 0$
- c)  $s^4 + (10 + K)s^3 + 9s + 11 = 0$
- d)  $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 4 + K = 0$

**Ejercicio propuesto 1.7** Determine el valor de  $K$  para que el sistema que se muestra en la Fig. 1.51 sea estable a lazo cerrado.

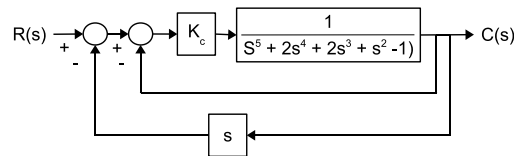


Figura 1.51: Esquema de control. Análisis de estabilidad

**Ejercicio propuesto 1.8** Para un sistema de control con retroalimentación unitaria, cuya función de lazo abierto es la que se muestra en la Ec. 1.92, se desea que usted verifique lo siguiente:

- a) Analice la estabilidad del sistema cuando opera en lazo cerrado, especificando los posibles rangos de  $K$  para satisfacer la estabilidad absoluta del sistema.
- b) Indique si es posible que este sistema tenga un error menor o igual a 0.2 a la rampa y, de ser posible, calcule el valor de  $K$  para satisfacer dicha condición.

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 5)}{s(s + 2)(s - 0,5)} \quad (1.92)$$

**Ejercicio propuesto 1.9** Para el sistema de control de velocidad que se muestra en la Fig. 1.52, se quiere encontrar los posibles valores para  $K_1$  y  $K_2$  que aseguren la estabilidad absoluta del esquema de control planteado. Dibuje un plano de  $K_1$  vs  $K_2$  en el cual destaque la zona que garantice la estabilidad deseada. Además proponga un par de valores para dichas ganancias que hagan que el error del sistema ante una rampa unitaria sea menor que 0,1.

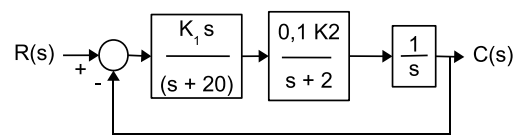


Figura 1.52: Sistema de control de velocidad

**Ejercicio propuesto 1.10** En un sistema de control de un helicóptero que se muestra en la Fig. 1.53,  $K$  y  $T$  representan los ejes de un plano, donde  $K$  es el eje vertical y  $T$  el horizontal. Muestre en dicho plano las posibles combinaciones de  $K$  y  $T$ , tal que el sistema a lazo cerrado sea estable y seleccione un par de valores para dichos parámetros tal que el error ante un escalón unitario sea  $1/2$ .

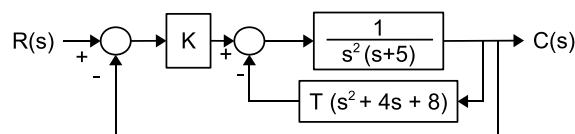


Figura 1.53: Sistema de control de un helicóptero

**Ejercicio propuesto 1.11** *Un pequeño vehículo sumergible tiene un sistema de control de profundidad como el que se muestra en la Fig. 1.54. A partir de allí determine lo siguiente se desea conocer la sensibilidad del sistema de control respecto a  $K$  y  $K_1$ .*

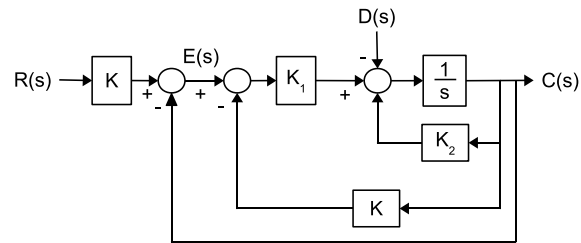


Figura 1.54: Sistema de control de profundidad

**Ejercicio propuesto 1.12** *Para los sistemas cuya representación de estado se muestra a continuación, obtenga la matriz de transferencia y a partir de allí muestre las relaciones de transferencia de cada una de las variables.*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = [ 1 \ 0 \ 0 ] \mathbf{x}$$